

Publicação Especial

Nº 14
2002

**Captura de Planetésimos em Ressonância: A Localização
Dos Pontos Corrotacionais e Estudo Sobre as
Velocidades Relativas de Colisões**

Dourival Edgar dos Santos Júnior

Tese de Doutorado
Rio de Janeiro, Julho de 2002

Observatório Nacional / MCT

**Captura de Planetésimos em Ressonância:
A Localização dos Pontos Corrotacionais e Estudo
sobre as Velocidades Relativas de Colisões**

TESE DE DOUTORAMENTO

Dourival Edgar dos Santos Júnior

Orientador: Dr. Rodney da Silva Gomes

Julho de 2002

Dedicatória

Essa tese é dedicada a meu pai por ele ter me contado (quando eu era criança) uma história sobre o astronauta Yuri Gagarin. Pai, foi essa história que despertou em mim a curiosidade para o espaço. Muito obrigado. Seu filho, Júnior.

Agradecimentos

Meus agradecimentos especiais ao ON/MCT pela bolsa de estudo e pela estrutura magnífica propiciada a mim ao longo desses 5 anos de estudos na instituição.

Mais que especial a Rodney pela orientação, amizade e conselhos. Você é um grande amigo e uma pessoa admirável.

A Roberto por me permitir furtar um pouco da sua vasta sabedoria. Você é um grande amigo e também uma pessoa admirável.

A todos os colegas do ON/MCT pela amizade e companheirismo.

A minha família por ter me ajudado e apoiado quando decidi ir para o Rio de Janeiro fazer a pós-graduação.

A Karine por ter tido muita paciência, companheirismo e amor comigo ao longo desses anos em que vivemos juntos no Rio de Janeiro. Meu coração hoje é tão maior graças a você.

A Leon por ter sido feito um dia antes de eu ter que retornar aos estudos no Rio de Janeiro. Que surpresa maravilhosa Deus me reservou!

Resumo

Neste trabalho nós estudamos o fenômeno da captura em ressonância, com um planeta, de planetésimos sofrendo uma força dissipativa proveniente do arrasto do gás, para o problema restrito de três corpos. São desenvolvidos dois métodos (semi-numérico e numérico) para determinar os pontos corrotacionais. Mostramos que o método numérico fornece todos os tipos de soluções de corrotação possíveis e com muito boa precisão quando comparadas as obtidas via integração numérica das equações completas para o problema de N-corpos. Em seguida, estudamos as velocidades relativas de colisões entre os planetésimos capturados em ressonâncias bem como a possibilidade de ganho de massa através destas colisões. Concluimos que pode haver ganho de massa através de colisões entre planetésimos de tamanhos semelhantes ou entre quaisquer planetésimos acima de um certo valor ou, ainda entre um planetésimo pequeno e um muito maior. Sugerimos de que forma o processo de captura em ressonância pode ter contribuído para a formação planetária.

Abstract

In this work we address the problem of capture into resonance in the frame of the restricted three body problem with a dissipative additional force. We develop two methods (semi-numeric and numeric) to determine the corotation points. We show that the numeric method provides all possible kinds of corotation solutions and that they are in a very good agreement with the points coming from the numeric integration of the complete N-body equations. We also address the problem of resonance capture investigating the effect of the relative velocities of collisions and the possibility of mass accretion for captured planetesimals. Some considerations about the collision process and conditions for mass gain are presented. We suggest how the process of resonance trapping of planetesimals may have contributed for planetary formation.

ÍNDICE

<i>INTRODUÇÃO</i>	1
<i>CAPÍTULO 1. O fenômeno da captura em ressonância</i>	7
<i>CAPÍTULO 2. Métodos de determinação de pontos corrotacionais</i>	16
2.1. <i>O método semi-numérico de 1ª ordem</i>	17
2.1.1. <i>Definição de solução de equilíbrio corrotacional e desenvolvimento genérico do método</i>	22
2.1.2. <i>Aplicação do método semi-numérico de 1ª ordem</i>	26
2.2. <i>O método numérico</i>	37
2.2.1. <i>Aplicação do método numérico</i>	39
2.3. <i>Discussão dos resultados</i>	49
<i>CAPÍTULO 3. Um estudo sobre as velocidades relativas de colisão entre pares de planetésimos capturados em ressonância</i>	50
3.1 <i>Introdução</i>	50
3.2. <i>Método utilizado para o cálculo das velocidades relativas de colisão entre pares de planetésimos capturados em ressonância</i>	51
3.2.1. <i>Algoritmo para o cálculo das velocidades relativas de colisão...</i>	56

3.2.2. Cálculo das velocidades relativas de colisão para pares de planetésimos capturados nas ressonâncias 1:2, 2:3 e 3:4	62
3.2.2.1. Gráficos $V_{rel} \times K$ e $V_{rel} \times R$ para a ressonância 1:2	65
3.2.2.2. Gráficos $V_{rel} \times K$ e $V_{rel} \times R$ para a ressonância 2:3	68
3.2.2.3. Gráficos $V_{rel} \times K$ e $V_{rel} \times R$ para a ressonância 3:4	71
3.3. Modelo para cálculo de fragmentação em uma colisão entre planetésimos	74
3.4. Soluções limite de ganho de massa para os modelos de arrasto $V^{1.4}$ e V^2	77
3.4.1. Análise dos resultados para o caso de órbita planetária circular.....	80
3.5. Soluções limite de ganho de massa para um modelo de arrasto variável.....	82
3.5.1. Análise dos resultados para o modelo de arrasto variável.....	88
3.6. O caso de órbita planetária excêntrica.....	89
3.6.1. Estudo das velocidades relativas de colisão para as ressonâncias 2:3 e 3:4 e arrasto Stokes.....	93
3.6.2. Colisões entre um planetésimo capturado em libração com outro capturado em corrotação.....	98
Conclusões e discussão gerais.....	102
Bibliografia.	107

Introdução

O fato das órbitas planetárias no Sistema Solar serem coplanares e quase circulares (exceto para Plutão) sugere que a formação do Sistema Solar ocorreu a partir de um disco achatado de gás e poeira girando ao redor do Sol. Esta formulação para explicar como se formaram os planetas no Sistema Solar é conhecida como modelo de Kant-Laplace. As teorias modernas sobre a formação do Sistema Solar são formulações mais sofisticadas do modelo de Kant-Laplace, proposto no século XVIII.

Atualmente, as duas teorias mais aceitas para explicar a formação dos planetas no Sistema Solar são:

- 1 - Crescimento por acreção gradual de corpos, como resultado de colisões entre pequenos objetos chamados de planetésimos, seguindo de acreção do gás do disco nebular para formar os planetas exteriores e
- 2 - Instabilidade gravitacional, onde uma região do disco nebular fragmenta e colapsa para formar proto-planetas gigantes.

O primeiro modelo tem duas formulações; acreção livre de gás (Safronov 1969) e na presença de gás (Mizuno 1980, Hasayashi et al. 1985) enquanto que o segundo modelo foi proposto por Kuiper (1951) e estudado inicialmente por Cameron (1978).

Cada um destes modelos conseguem explicar de maneira satisfatória algumas particularidades do Sistema Solar mas também falham ao tentar explicar outras. Desta maneira, uma compreensão melhor do processo de formação planetária requer um entendimento mais detalhado do caminho em que os processos físicos operaram durante o processo de formação do Sistema Solar.

No primeiro estágio do modelo de acreção de planetésimos, os grãos microscópicos crescem por coalescência a medida que colidem e vão acomodando-se no plano médio do disco. A fase de crescimento dos planetésimos com tamanhos de poucos metros a alguns quilômetros ainda não é bem entendida pois, com estes tamanhos, os planetésimos têm uma queda orbital muito rápida, devido ao forte arrasto do gás. Então é necessário que o crescimento dos planetésimos se faça de maneira muito rápida nesta fase. Um mecanismo possível para explicar o crescimento dos planetésimos nesta fase é a captura em ressonância de planetésimos por um planeta formado (Weidenschilling e Davis 1985) já que este processo interrompe o decaimento orbital do planetésimo. Uma vez os planetésimos atinjam tamanhos da ordem de 10Km, as interações entre pares de

planetésimos dominam as outras forças não gravitacionais (arrasto do gás, por exemplo). Desta maneira, os planetésimos crescem de maneira acelerada devido a colisões de acreção, até que alguns alcançam massas $\sim 0,1M_T$ para a região dos planetas terrestres e $\sim 10M_T$ para a região dos planetas jovianos, isolados entre si. No fim desta etapa estes corpos são chamados de proto-planetas. Weidenschilling et al. (1997) realiza simulações numéricas para esta etapa e após $\sim 10^6$ anos encontra a formação de 18 proto-planetas com massas $\sim 0,1M_T$ distribuídos de maneira espaçada de 0,05 até 1,5UA, para a região dos planetas terrestres.

A partir de $10M_T$ os proto-planetas (exteriores) ganham massa rapidamente por acreção do gás do disco em sua volta e formarão os planetas gigantes (com seus envelopes de gás), num tempo total estimado em $\sim 10^7$ anos. O fato dos planetas Júpiter, Saturno, Urano e Netuno terem aparentemente núcleos similares ($\sim 10M_T$), o qual iniciaria o processo de acreção do gás nebular é tido como uma forte evidência do modelo de acreção por colisões de planetésimos pois, esta massa crítica independe da distância orbital na Nebulosa Solar (Mizuno 1980).

No caso de Júpiter, o planeta acumulou uma massa $\sim 300M_T$ de gás durante este último processo e Urano e Netuno não conseguiram acumular um envelope de gás da mesma ordem de grandeza que Júpiter acumulou pois, às suas distâncias heliocêntricas, estes planetas teriam demorado um pouco mais para adquirirem a massa crítica e com isto grande quantidade de gás da nebulosa já teria sido dissipado.

Recentemente uma nova questão sobre a formação de Urano e Netuno sob a ótica do modelo de colisões de acreção veio a tona. Trabalhos anteriores (Ip, 1989, Brunini e Fernandez, 1999) teriam conseguido formar os dois planetas através de integrações numéricas incluindo colisões de acreção (no cenário livre de gás), a partir de uma população com algumas centenas de embriões espalhados além de Saturno. Contudo, simulações feitas por Levison e Stewart (2001) não conseguem reproduzir este resultado após 10^8 anos de evolução da população inicial de embriões. Os autores observam que as perturbações mútuas entre os embriões e as de Júpiter e Saturno sobre os mesmos aumentam em muito suas excentricidades acarretando numa diminuição da seção de choque colisional pois esta é proporcional ao inverso da velocidade relativa entre os mesmos. Com isto, poucas colisões ocorrem não havendo assim a formação dos núcleos dos planetas. Em trabalhos posteriores (Thommes, Duncan e Levison, 1999,

2002), os autores supõem os dois planetas formados na região entre Júpiter e Saturno e simulam a evolução orbital dos quatro planetas e um disco de planetésimos exterior, chegando-se a configurações finais semelhantes ao Sistema Solar atual. Embora não precisemos supor que Urano e Netuno tenham-se formado tão interiormente como sugerido nestes dois últimos trabalhos, Levison e Stewart (2001) certamente sugerem que estes dois planetas devem ter-se formado bem mais próximos do Sol que suas posições atuais e/ou havia uma quantidade bem maior de massa na região onde teriam se formado. De qualquer forma, estes dois fatos sugerem que boa parte da massa do disco primordial teria migrado para regiões mais internas do Sistema Solar por arrasto do gás e possivelmente teria sido capturada pelos planetas gigantes, criando, desta forma, uma concentração de massa densa o suficiente para a acreção de Urano e Netuno.

O modelo da colisão de acreção de planetésimos tem sido mais aceito pelos cientistas devido a várias razões. Colisões de acreção explica facilmente a formação dos planetas terrestres, satélites, asteróides e cometas. Dependendo da época em que o gás nebular seja removido, este modelo explica de maneira satisfatória a diferença na composição dos planetas gigantes, ou seja, Urano e Netuno formado com núcleos similares a Júpiter e Saturno mas com envelopes gasosos bem menores. Entretanto este modelo apresenta alguns problemas relacionados à escala de tempo de formação dos planetas gigantes e também às estimativas das massas dos núcleos destes. O tempo total requerido para formar um planeta gigante é calculado em $\sim 10^7$ anos. Este é da ordem de grandeza do tempo de vida de discos circumsolares, o qual é estimado em $\sim 10^6 - 10^7$ anos (Strom et al. 1993). Se o gás desaparecer antes da formação do núcleo de $10M_T$, este se torna incapaz de acumular o H e He necessários para formar os envelopes dos planetas gigantes. Alguns outros problemas surgiram mais recentemente. Resultados obtidos com novos modelos para os interiores de Júpiter e Saturno (Chambrier et al. 1992, Guillot et al. 1997) tem mostrado que os dados observacionais coletados poderiam ser melhor explicados com massas dos núcleos menores que as calculadas anteriormente; de 3 a $10M_T$ para Júpiter e de 1 a $13M_T$ para Saturno. Modelos anteriores estimavam as massas dos núcleos em $10-30M_T$ para Júpiter e $15-25M_T$ para Saturno (Stevenson 1982). Se as massas dos núcleos de Júpiter e Saturno forem da ordem do limite inferior destes intervalos então estes núcleos não poderão ser massivos o

suficiente para acumular uma grande quantidade de gás e formar o envelope gasoso presente nos planetas gigantes. Além do mais recentes descobertas de planetas extrasolares (Marcy e Butler, 1996, Butler et al. 1997) tem mostrado planetas com massas $>M_J$ em órbitas muito próximas a estrela e alguns em órbitas muito excêntricas. Estes fatos não corroboram para o mecanismo de formação por colisões de acreção como foi visto anteriormente.

Formação planetária pelo modelo da instabilidade gravitacional foi primeiro proposto por Kuiper (1951) e estudado com mais detalhe posteriormente por Cameron (1978). Neste modelo, a Nebulosa Solar deve ser massiva e fria o bastante para se tornar gravitacionalmente instável. Formação planetária neste cenário ocorre rapidamente. Inicialmente a quebra do disco em planetas gigantes se dando em 10^3 anos seguindo da sedimentação dos grãos de poeira para formar o núcleo sólido dentro de $\sim 10^3$ anos e a formação completa do planeta acontecendo dentro de $\sim 10^5$ anos. Este modelo evita qualquer problema com a escala de tempo associada com o desaparecimento do disco ao redor da estrela cujo tempo de vida é estimado em $\sim 10^6$ - 10^7 anos e também parece ser capaz de formar planetas razoavelmente massivos (~ 1 - $10M_J$) (Boss 1999). Boss (1998) mostra por meio de uma simulação que este modelo resulta na formação de dois proto-planetos gasosos gigantes em órbitas circulares com semi-eixos ~ 5 AU e ~ 10 AU (em um disco com massa $\sim 0,14M_{sol}$), semelhantes as órbitas de Júpiter e Saturno num tempo de formação de 10^3 anos. Outros fatos a favor deste modelo são a formação do núcleo de um planeta com $1M_J$ com massas $\sim 6M_T$, valor este intermediário para os novos modelos dos interiores de Júpiter e Saturno (Chambrier et al. 1992, Guillot et al. 1997). A formação rápida de um planeta como Júpiter certamente evitaria a formação de um planeta na região do cinturão de asteróides devido às perturbações do planeta nesta região (Kortenkamp e Wetherill 2000). Além do mais, planetas gigantes recentemente descobertos com massas muito maiores que a de Júpiter tem corroborado para revitalizar este modelo.

Apesar do modelo da instabilidade gravitacional não explicar a formação dos satélites e cometas, a principal aversão a ele vem do fato que planetas com massas tão diferentes como Júpiter e Saturno não poderiam ter núcleos com massas tão similares. Segundo pelo fato destes planetas terem abundâncias metálicas observadas muito maiores que a solar o que contraria o fato dos planetas terem sido formados diretamente

da Nebulosa Solar. Contudo as novas estimativas para estes núcleos e os novos modelos para os interiores de Júpiter e Saturno (Chambrier et al. 1992, Guillot et al. 1997) tem removido esta objeção ao modelo da instabilidade gravitacional. Um outro problema é a consideração de um disco com massa relativamente maior que a estimativa para a Nebulosa Solar, que é de $0,01-0,1M_{\text{sol}}$ (Weidenschilling 1977).

Boss (1996, 1997) tem sugerido um cenário onde ambos os mecanismos seriam responsáveis pela formação dos planetas do Sistema Solar. Neste novo cenário a formação de Júpiter e Saturno seria melhor explicada com o modelo da instabilidade gravitacional, enquanto que, os planetas terrestres se formariam por colisões de acreção de planetésimos na região interior do disco bem como Urano e Netuno na região exterior.

Simulações recentes da influência de uma formação anterior de Júpiter e Saturno na formação dos planetas terrestres e do cinturão de asteróides foram feitas por Kortenkamp e Wetherill (2000). Neste trabalho, os autores mostram que às distâncias heliocêntricas atuais, os dois planetas não favoreceriam ao processo de ganho de massa por colisões de acreção na região dos planetas terrestres, sendo mais difícil ainda para o cinturão de asteróides. Contudo os autores encontram resultados menos pessimistas ao considerarem que Júpiter e Saturno se formaram a distâncias orbitais um pouco maiores que as atuais migrando posteriormente até às suas distâncias heliocêntricas atuais. Desta maneira as perturbações planetárias na região dos planetas terrestres e no cinturão dos asteróides seriam menores permitindo assim algum ganho de massa nas colisões.

Foi dito anteriormente que o modelo de formação por colisões de acreção não explicava de maneira satisfatória a formação de planetésimos com tamanhos de $\sim 1\text{m}$ a $\sim 10\text{km}$. Ocorre que, para estes tamanhos de planetésimos, o arrasto do gás é muito intenso resultando assim numa queda orbital dos mesmos de maneira muito rápida. Então é necessário algum mecanismo que faça com que os planetésimos ganhem massa durante as colisões. Um mecanismo possível que pode explicar a formação dos planetésimos nesta fase é a captura em ressonância de planetésimos por um planeta pré-formado (Weidenschilling e Davis 1985). Para que este mecanismo seja eficiente é necessário que a formação dos corpos não seja concomitante, ou seja, tem que haver um proto-planeta já formado num ambiente onde planetésimos estejam começando suas formações por colisões de acreção. Desta maneira, o cenário proposto por Boss, onde

um proto-Júpiter e um proto-Saturno se formaram rapidamente e influenciaram na formação dos outros planetas terrestre além de Urano, Netuno e também dos asteróides seria mais adequado.

Neste trabalho estaremos investigando a possibilidade do mecanismo da captura em ressonância gerar condições para que colisões entre planetésimos capturados em ressonância, com um planeta gigante formado, resultem em crescimento de massa, na fase em que os planetésimos tem tamanhos da ordem de alguns metros a poucos quilômetros. Desta maneira, este trabalho se apresenta mais apoiado no cenário proposto por Boss.

Os capítulos que seguem estão organizados da seguinte maneira. No capítulo 1 será apresentado o mecanismo da captura em ressonância, os resultados de alguns trabalhos que foram feitos a respeito deste fenômeno e o que ainda poderá ser feito a respeito. No capítulo 2, serão apresentados os métodos desenvolvidos para determinar os pontos de equilíbrio para a ressonância tipo corrotação. Serão apresentados também os resultados obtidos pela aplicação destes métodos bem como uma análise dos mesmos. No capítulo 3, será apresentado um método para se determinar as velocidades relativas de colisão entre dois planetésimos capturados em uma mesma ressonância (tipo libração) e a partir de um modelo para ganho de massa em uma colisão entre dois planetésimos será determinada a condição para que ocorra realmente este ganho. São ainda consideradas colisões entre planetésimos capturados em libração e em corrotação.

Capítulo 1. O fenômeno da captura em ressonância

Captura em ressonância ocorre quando o ganho de energia e momento angular de um corpo (ou de uma partícula) devido a perturbações planetárias ressonantes compensa exatamente a perda de energia e momento angular devido a uma força dissipativa externa¹, sendo a captura um evento probabilístico. Vários estudos têm sido feitos sobre a influência deste fenômeno durante o processo de formação do Sistema Solar. Podemos citar como exemplos, os trabalhos de Greenberg (1973), Peale (1986), Malhotra (1988) sobre o processo de captura em ressonância de um sistema de satélites planetários que evolui sob efeito da maré planetária. E os trabalhos de Weidenschilling e Davis (1985), Patterson (1987), Beaugé e Ferraz-Mello (1993), Gomes (1995), Mothé-Diniz e Gomes (2000) sobre o processo de captura em ressonância de planetésimos sob a ação do arrasto de um gás.

Analiticamente este fenômeno tem sido estudado por meio de uma Hamiltoniana dependente de um parâmetro que varia adiabaticamente. Neste formalismo, o sistema dissipativo é substituído por um Hamiltoniano não-autônomo, entretanto, para esta aproximação ter validade, a dissipação tem que ser pequena quando comparada à contribuição gravitacional. Henrard (1982), Henrard e Lemaître (1983), Lemaître (1984) e posteriormente Malhotra (1988), estudam a probabilidade de captura com auxílio deste formalismo.

Apesar dos resultados satisfatórios obtidos com este formalismo para o caso de satélites artificiais este não pode ser aplicado por completo para outros fenômenos como, por exemplo, partículas afetadas pelo arrasto Poynting-Robertson, ou mesmo para o estudo das capturas de planetésimos sujeitos ao arrasto gasoso durante a formação do Sistema Solar. Para estes casos, o rápido decaimento do semi-eixo maior das suas órbitas não permite o uso da teoria adiabática, ou seja, não satisfaz a condição citada anteriormente. Gomes (1995a) estuda numericamente a captura em ressonância de partículas sujeitas ao arrasto Poynting-Robertson para o caso não-adiabático mostrando que para este regime, a probabilidade de captura é muito menor que no regime adiabático. Com este formalismo também é possível estudar a evolução em ressonância de uma partícula e saber a sua estabilidade orbital. Gomes (1995b) aplica esta teoria e deduz uma condição para estabilidade mostrando que as capturas para o

¹ Este é o caso mais comum, mas pode ser também uma força anti-dissipativa imprimindo energia e momento angular, compensados exatamente por perturbações de ressonância interna.

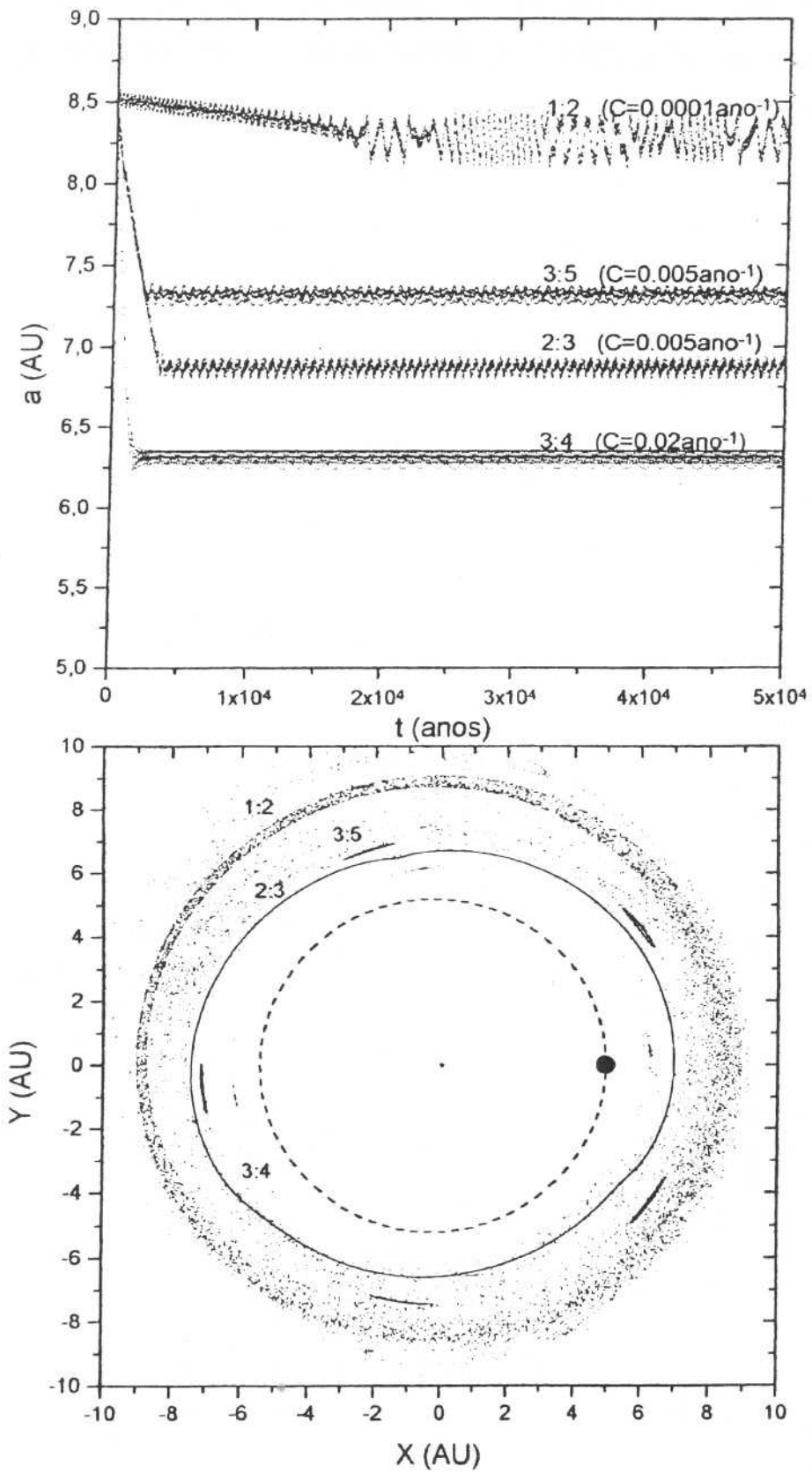
com um planeta já formado. Assim, Patterson sugere que o Sistema Solar teria se formado a partir da acumulação de planetésimos em ressonâncias externas com Vênus (para o Sistema Solar interno) e com Júpiter (para o Sistema Solar externo). Neste trabalho, o autor também explica que os planetas não estariam hoje em ressonâncias devido a colisões com proto-planetas em ressonâncias vizinhas durante o estágio final de formação do Sistema Solar. Nota-se também que neste trabalho foram considerados dois tipos de arrasto para o gás; o arrasto proporcional a velocidade relativa da partícula em relação ao gás (chamado arrasto *Stokes*), para a região dos planetas exteriores e proporcional ao quadrado da velocidade relativa da partícula em relação ao gás (arrasto V^2), para a região dos planetas interiores. Esta diferença entre os modelos de arrasto advém de considerações como a diferença de densidade da Nebulosa Solar nas regiões interna e externa e do fato que os planetésimos capturados nestas regiões adquirem velocidades diferentes. Estas considerações feitas por Patterson, alteram os tamanhos mínimos dos planetésimos capturados em ressonâncias com Júpiter e também o tempo de formação em relação ao trabalho de Weidenschilling e Davis, pois estes autores só consideraram o arrasto $\sim V^2$ como modelo de força dissipativa. Sendo assim, os resultados obtidos por Patterson são mais coerentes que os obtidos por Weidenschilling e Davis.

Beaugé et al. (1994), por meio de uma integração numérica para o problema de N -corpos considerando o arrasto *Stokes* como força dissipativa agindo nos planetésimos, simulam a formação de um proto-Saturno com características similares (semi-eixo maior e excentricidade) a do planeta atual. Nesta simulação os autores consideram os efeitos da perturbação planetária de Júpiter, arrasto do tipo *Stokes*, perturbações gravitacionais mútuas entre os planetésimos (embriões) e colisões entre os membros de uma população inicial de 1000 planetésimos com mesmo tamanho. Os autores explicam que a órbita final do proto-Saturno não está em ressonância com Júpiter devido a nenhuma particular ressonância dominar as outras e controlar o processo de acumulação e sugerem que o mecanismo proposto por Patterson de fato poderia explicar a quase-comensurabilidade dos planetas para o Sistema Solar externo.

Durante seu decaimento orbital, um planetésimo pode passar por todas as ressonâncias e colidir com o Sol ou com algum planeta, ser enviado para fora do Sistema Solar por um encontro próximo com um planeta ou ser capturado em uma

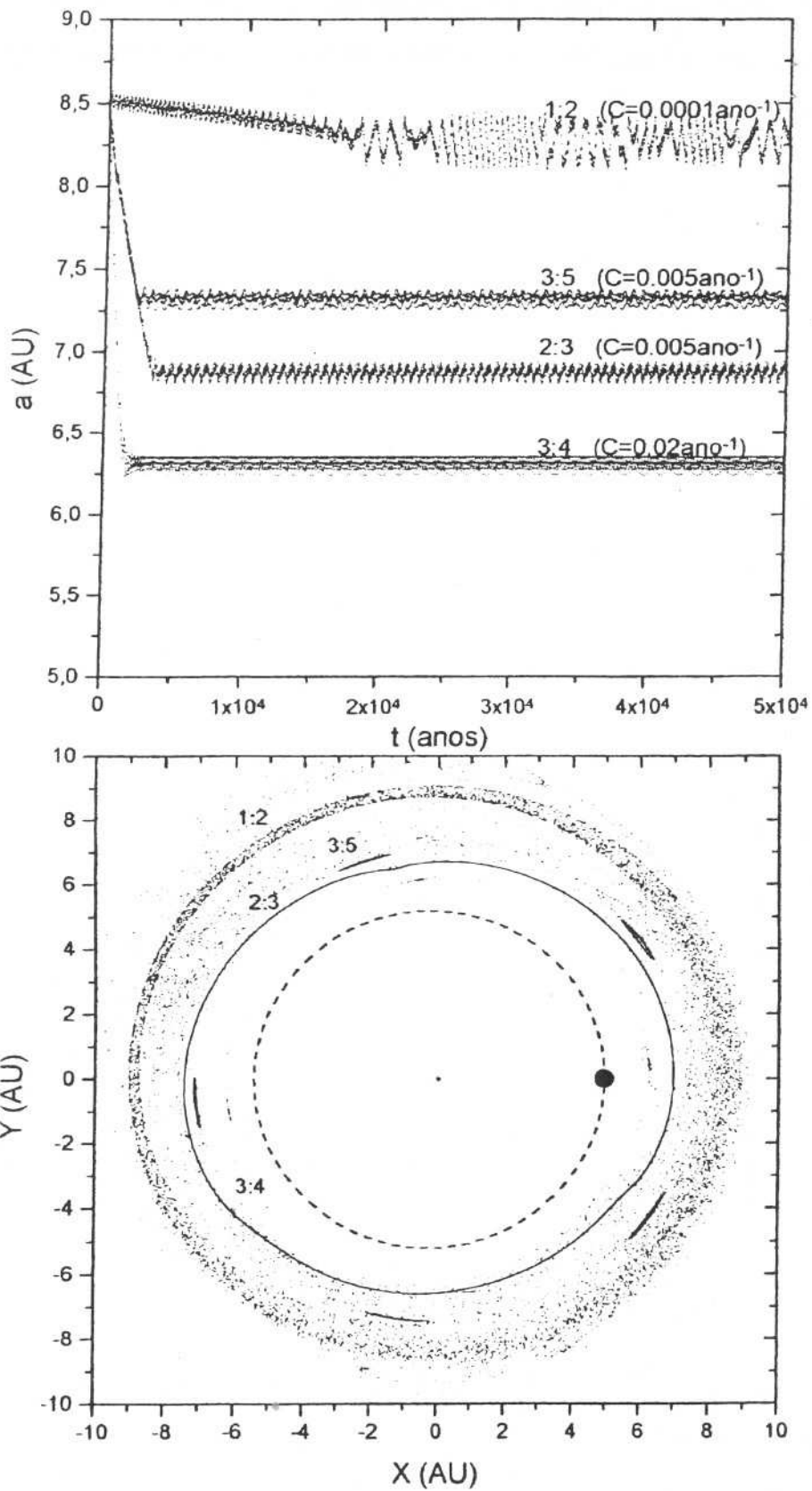
ressonância com o mesmo. Quando, simultaneamente, ocorrem uma libração de um ângulo ressonante e uma ressonância secular entre um planetésimo e um planeta, diz-se que o planetésimo foi capturado em uma ressonância do tipo corrotação. Se ocorrer somente a libração do ângulo ressonante então, diz-se que o planetésimo foi capturado em uma ressonância tipo libração. Uma diferença entre a geometria destes dois tipos de ressonâncias é que no caso da libração, os planetesimos capturados têm o mesmo semi-eixo maior médio e a mesma excentricidade média mas outros elementos orbitais estão circulando entre 0 e 360° (em especial a longitude do periastro). Em outras palavras, os planetesimos quando capturados em ressonância libracional são distribuídos sobre todas as longitudes em um determinado instante de tempo. Por outro lado, planetesimos de mesmo tamanho capturados em ressonância corrotacional acumulam-se em p (grau da ressonância) pontos chamados de pontos de equilíbrio corrotacional. Neste caso a longitude do periastro libra ao redor de um valor fixo (com relação a direção do periastro do planeta). Estes pontos de acumulação podem ter promovido o crescimento de planetesimos (de alguns metros até poucos quilômetros) durante o processo de formação planetária. As Figuras 1.1(a) e 1.1(b) exemplificam o que foi descrito anteriormente. Nesta simulação é mostrada a evolução orbital e captura em ressonância de quatro planetesimos (de tamanhos variados) partindo inicialmente de $8,5AU$ e órbita com excentricidade baixa ($e=0,01$). Pode-se observar pela Figura 1.1(a), que os planetesimos são capturados em quatro ressonâncias diferentes; $1:2$ situada à $8,25UA$, $3:5$ situada à $7,30UA$, $2:3$ situada à $6,81UA$ e $3:4$ situada à $6,29UA$. Isto se deve, em primeiro, a diferença entre os tamanhos dos planetesimos pois, de uma maneira geral, planetesimos maiores (menores) são capturados em órbitas mais distantes (próximas) do planeta. Segundo, para o caso das ressonâncias $3:5$ e $2:3$ (para estas os planetesimos têm o mesmo tamanho) o que definiu o local da ressonância foi como estes planetesimos chegaram na região de ressonância. Assim, um planetésimo foi capturado na ressonância $3:5$ e outro continuou sua queda orbital até ser capturado na ressonância $2:3$. Na Figura 1.1(b), são mostradas as posições dos planetesimos em coordenadas heliocêntricas, onde foi tomando como passo de saída dos dados um período de Júpiter, ou seja, cada ponto da órbita de cada planetésimo é representado em espaço real após cada período realizado por Júpiter. Neste quadro, pode-se perceber a diferença entre a geometria das órbitas, pois fica claro as regiões de acumulação para as capturas em

corrotação; cinco regiões para a 3:5 e quatro regiões para a 3:4. Para a libração observa-se o comportamento descrito anteriormente, ou seja, os pontos preenchendo uma linha (2:3) ou uma região (1:2).



Simulação numérica da evolução e posterior captura em ressonância de quatro planetesimos com Júpiter. Fig. 1.1(a) mostra a evolução temporal do semi-eixo maior dos planetesimos e a localização das ressonâncias. Fig. 1.1(b) mostra os pontos anteriores em um sistema de coordenadas heliocêntrico. Cada ponto do gráfico é colocado após um período orbital de Júpiter num referencial girante.

corrotação; cinco regiões para a 3:5 e quatro regiões para a 3:4. Para a libração observa-se o comportamento descrito anteriormente, ou seja, os pontos preenchendo uma linha (2:3) ou uma região (1:2).



Simulação numérica da evolução e posterior captura em ressonância de quatro planetesimos com Júpiter. Fig. 1.1(a) mostra a evolução temporal do semi-eixo maior dos planetesimos e a localização das ressonâncias. Fig. 1.1(b) mostra os pontos anteriores em um sistema de coordenadas heliocêntrico. Cada ponto do gráfico é colocado após um período orbital de Júpiter num referencial girante.

Usualmente existe um raio máximo e um mínimo do planetésimo para o qual ocorrem capturas em corrotação². Acima do valor máximo para o raio do planetésimo as capturas sempre se darão em libração. Embora este fato limite à aplicabilidade de acumulação de planetésimos capturados em ressonância corrotacional, a eficiência do processo de acumulação de massa nestes pontos (Mothé-Diniz e Gomes 2000) motiva o presente estudo sobre este tipo de captura. Uma outra questão ainda não bem esclarecida é qual a influência das ressonâncias internas com Júpiter no processo de formação dos planetas terrestres e dos asteróides. Deve ser enfatizado que os tamanhos dos planetésimos para os quais a ressonância corrotacional é mais efetiva varia de alguns metros até poucos quilômetros (dependendo da massa do planeta, propriedades físicas da nebulosa e local da ressonância) (Patterson 1987, Mothé-Diniz e Gomes 2000). Neste intervalo de tamanhos acumulação não é explicado nem por coalescência física (válido para micro partículas) nem por gravitação mútua (válido para planetésimos com tamanhos a partir da ordem de 10 quilômetros). Além do mais o arrasto do gás produz nos planetésimos, com tamanhos de alguns metros a poucos quilômetros, uma queda orbital muito rápida o que implica que o crescimento dos planetésimos, neste intervalo de tamanho, deve ocorrer rapidamente (Lissauer 1993). Assim, um mecanismo que possa deter esta rápida migração e gerar um processo de acumulação pode ter tido uma influência importante no processo inicial de formação planetária.

O primeiro trabalho sistemático com objetivo de determinar os pontos corrotacionais com arrasto gasoso foi feito por Beaugé e Ferraz-Mello (1983). Neste trabalho os autores desenvolveram um método de 1^a ordem baseado em equações médias considerando o caso do arrasto *Stokes* e também encontraram que somente poderiam ocorrer capturas externas ao perturbador. Só um pouco mais recentemente, outros trabalhos vieram a mostrar que também poderiam ocorrer capturas em ressonâncias internas (Kary e Lissauer 1995, Mothé-Diniz e Gomes 2000). Em particular, para o caso das ressonâncias corrotacionais estas capturas são estáveis. Neste último trabalho citado sobre ressonância corrotacional, Mothé-Diniz e Gomes mostram que as velocidades relativas entre dois planetésimos capturados em uma mesma ressonância são de fato muito baixas o que reforça a idéia de Patterson de acumulação de planetésimos em um mesmo ponto. Os autores também encontraram um novo tipo de ressonância chamada de corrotacional extensa, além das internas. A principal

² Exceção para o caso de corrotações extensas (Mothé-Diniz e Gomes 2000).

característica das ressonâncias extensas é que há uma variação contínua nos valores do raio do planetésimo (a partir de um raio mínimo) para o qual a ressonância corrotacional ocorre. Ou seja, planetésimos capturados em um ponto de uma corrotação não-extensa irão acumular-se até um determinado tamanho. Passando o limite para o qual esta captura ocorre, o planetésimo resultante sairá da corrotação e passará para o regime de libração. No caso das capturas extensas isto não ocorre pois os planetésimos capturados em um mesmo ponto irão acumular-se indefinidamente (em um outro ponto próximo) sem sair da ressonância corrotacional.

Embora Weidenschilling e Davis tenham sugerido que o fenômeno da captura em ressonância fosse favorável a fragmentação dos planetésimos, nenhum trabalho foi feito no intuito de se verificar de fato como evoluem as velocidades relativas de colisão entre planetésimos capturados em ressonância do tipo libração. No único trabalho feito sobre colisões entre planetésimos, Malhotra (1993) simula o efeito de um encontro gravitacional ou colisão impondo um impulso de velocidade a um planetésimo em ressonância. Neste trabalho a autora mostra que um planetésimo pode ser retirado da ressonância por um impulso relativamente pequeno quando dado na direção tangencial, ao passo que impulsos na direção radial são bem mais difíceis de retirar o planetésimo da ressonância. Contudo este trabalho não simula de fato uma colisão entre dois planetésimos em uma mesma ressonância.

Até aqui foi feita uma descrição do fenômeno da captura em ressonância e foram citados alguns trabalhos a respeito deste fenômeno. Sabemos que as capturas em corrotação tem uma aplicabilidade limitada pois a faixa de tamanhos dos planetésimos que são capturados neste tipo de ressonância é muito curta mas, o fato da acumulação de planetésimos capturados em pontos corrotacionais favorecer ao processo de crescimento de massa motiva o estudo sobre este tipo de captura. Além do mais nenhum trabalho, até então, conseguiu determinar analiticamente os pontos de equilíbrio corrotacionais nem para as capturas extensas nem para as capturas internas. Por último, falta um estudo mais detalhado sobre velocidades relativas de colisão para planetésimos capturados em uma ressonância do tipo libração pois o trabalho da Malhotra simula colisões entre planetésimos em órbitas ressonantes e não ressonantes.

Nos capítulos seguintes iniciaremos as investigações sobre a possibilidade do mecanismo da captura em ressonância de planetésimos por um planeta contribuir para o processo de ganho de massa em colisões entre pares de planetésimos.

Capítulo 2. Métodos de determinação de pontos de corrotacionais

Introdução

Os trabalhos de Weidenschilling e Davis (1985) e Patterson (1987) embora tenham sido pioneiros no estudo das capturas em ressonância, considerando o arrasto aerodinâmico do gás, não foram sistemáticos em determinar as condições para que este fenômeno ocorresse. Somente na década de 90 é que este estudo foi feito sistematicamente por Beaugé e Ferraz-Mello (1993). Neste trabalho, os autores determinam as soluções estacionárias (libração e corrotação) analiticamente mediante o uso de equações ressonantes mediadas além da clássica expansão de Laplace para a função perturbadora. O resultado a que eles chegam mostram que as capturas em ressonâncias externas, quando em libração, se dão em “valores universais” de excentricidade para cada ressonância, sendo independente de características do perturbador (como órbita, massa) e mesmo do tamanho do planetésimo capturado e que estas não podem ser interiores ao planeta. Para as capturas em corrotação, os autores determinam as famílias de soluções de equilíbrio (soluções estáveis e instáveis) em função do coeficiente de arrasto do gás para as ressonâncias 1:2, 2:3 e 3:4. A precisão dos resultados é determinada pelos autores comparando os resultados obtidos analiticamente com valores obtidos mediante integrações numéricas das equações completas de movimento. Em geral, os resultados obtidos por ambos os métodos estão em boa concordância, contudo os autores justificam a discrepância entre os valores analítico e numérico pelo fato de terem usado a expansão de Laplace para a função perturbadora e o uso de equações mediadas. Para as soluções de libração, Beaugé (1998) mostra que alguns efeitos devido aos termos de curto período (os quais não são considerados no primeiro trabalho) acarretam uma significativa diferença na localização das soluções de equilíbrio, bem como a perda da propriedade de “excentricidade universal” para as ressonâncias. Posteriormente, Beaugé et al. (1999) desenvolve um método de segunda ordem com o objetivo de explicar a discrepância encontrada entre os valores obtidos (para as soluções de corrotação) analítica e numericamente, encontrando soluções em muito boa concordância entre os métodos. Embora estes trabalho tenham

mostrado refinamento do método e resultados mais precisos, em nenhum deles foram encontradas soluções para capturas que são encontradas em simulações numéricas, como em órbitas interiores ao planeta (Kary e Lissauer 1995, Mothé-Diniz e Gomes 2000) assim como os casos das ressonâncias “extensas” (Mothé-Diniz e Gomes 2000).

2.1. O método semi-numérico de 1ª ordem

Consideremos as equações de movimento para um planetésimo supondo o problema restrito de três corpos, planar e elíptico onde é adicionado uma força dissipativa (arrasto do gás) às equações de movimento do planetésimo. As equações de Lagrange são consideradas para as variações dos elementos orbitais (a, e, ϖ, M) da órbita do planetésimo. Neste conjunto de variáveis, as equações para as variações dos elementos osculadores para a órbita do planetésimo são dadas por (Brower e Clemence, 1961)

$$\begin{aligned}\dot{a} &= \frac{2}{na} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial M} + \dot{a}_{f.d.} \\ \dot{e} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \varpi} + \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial M} + \dot{e}_{f.d.} \\ \dot{\varpi} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial e} + \dot{\varpi}_{f.d.} \\ \dot{M} &= n - \frac{2}{na} \left(\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial a} \right) M + \frac{(1-e^2)}{na^2 e} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial e} + \dot{M}_{f.d.} = n - \dot{\sigma} + \dot{M}_{f.d.}\end{aligned}\tag{1}$$

onde, a é o semi-eixo maior, e é a excentricidade, ϖ é a longitude do periélio, M é a anomalia média e n o movimento médio da órbita. \mathfrak{R} é a função perturbadora dada por

$$\mathfrak{R} = \mu \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_p|} - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_p}{r_p^3} \right)\tag{2}$$

onde, $\mu = G \frac{m_p}{M_{Sol}}$ é a relação entre a massa do planeta em relação a massa do Sol e \vec{r} e

\vec{r}_p são os vetores posição do planetésimo e do planeta, respectivamente, em relação ao Sol.

Os termos $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_p|}$ e $\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_p}{r_p^3}$ da função perturbadora são dados por

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_p|} = (r^2 + r_p^2 - 2rr_p \cos \beta)^{-1/2} \quad (3)$$

$$\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_p}{r_p^3} = \frac{r}{r_p^2} \cos \beta \quad (4)$$

onde,

$$\cos \beta = \cos[(f + \omega) - (f_p + \omega_p)] \quad (5)$$

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f} \quad (6)$$

sendo β o ângulo entre os vetores \vec{r} e \vec{r}_p .

A função perturbadora é escrita inicialmente em função do conjunto de variáveis $(a, e, \varpi, f, a_p, e_p, \varpi_p, f_p)$ onde f é a anomalia verdadeira. As derivadas da função perturbadora nas Eqs. 1 são obtidas via regra da cadeia com o auxílio das expressões

$$\tan \frac{f}{2} = \frac{\sqrt{1 - e}}{\sqrt{1 + e}} \tan \frac{u}{2} \quad (7)$$

$$u - e \sin u = M \quad (8)$$

onde u é a anomalia excêntrica.

As derivadas da função perturbadora em relação as variáveis a e ϖ são diretas mas a derivada em relação a variável e tem além da parte direta uma indireta dada por

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial e} \quad (9)$$

e a derivada em relação a variável M é dada por

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial M} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial M} \quad (10)$$

ficando por fim escritas em função das variáveis de frequência rápida u e u_p .

Ao invés de se trabalhar com a anomalia média (M) é comum utilizar-se, nos problemas de captura em ressonância, uma nova variável chamada ângulo ressonante (ϕ), dada por

$$\phi = (j + k)(M + \varpi) - j(M_p + \varpi_p) - k\varpi \quad (11)$$

onde $j > 0$ e k são inteiros com $k > 0$ definindo uma ressonância externa e $k < 0$

definindo uma ressonância interna, ou seja, uma órbita do planetésimo exterior e interior à do planeta.

Essa troca da variável M por ϕ implica em uma mudança de variáveis também nas Eqs. (1). Neste caso a função perturbadora que era escrita como $\mathcal{R}(a, e, \varpi, M)$ será mudada para $\mathcal{R}^* = \mathcal{R}^*(a, e, \varpi^*, \phi) = \mathcal{R}(a, e, \varpi, M(\varpi, \phi))$. Lembrando que omitimos a dependência da função perturbadora em relação aos elementos orbitais do planeta.

Dessa maneira as derivadas da função perturbadora com relação as antigas variáveis estarão relacionadas com as derivadas em relação as novas variáveis por

$$\frac{\partial \mathcal{R}^*}{\partial \varpi^*} = \frac{\partial \mathcal{R}^*}{\partial \varpi} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial \varpi} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \varpi} - \frac{j}{j+k} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial M} \quad (12)$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}^*}{\partial \phi} = \frac{\partial M}{\partial \phi} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial M} = \frac{1}{j+k} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial M} \quad (13)$$

Substituindo a Eq. (12) e a Eq. (13) nas Eqs. (1) obtém-se

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{2}{na} (j+k) \frac{\partial \mathcal{R}^*}{\partial \phi} + \dot{a}_{f.d.} \\ \dot{e} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} [j - (j+k)\sqrt{1-e^2}] \frac{\partial \mathcal{R}^*}{\partial \phi} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial \mathcal{R}^*}{\partial \varpi^*} + \dot{e}_{f.d.} \\ \dot{\varpi}^* &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial \mathcal{R}^*}{\partial e} + \dot{\varpi}_{f.d.} \\ \dot{\phi} &= (j+k)\dot{M} - j\dot{n}_p - j\dot{\varpi}^* + \dot{\phi}_{f.d.} \end{aligned} \quad (14)$$

escritas agora no novo conjunto de variáveis. A partir daqui em diante usaremos nesta seção ϖ ao invés de ϖ^* . Usaremos também o sub-índice $f.d.$ para referência a variáveis relativas à força dissipativa.

Os termos dissipativos $\dot{a}_{f.d.}$, $\dot{e}_{f.d.}$, $\dot{\varpi}_{f.d.}$ e $\dot{\phi}_{f.d.}$ serão obtidos mediante uso das equações de Gauss (Brower e Clemence, 1961)

$$\begin{aligned} \dot{a}_{f.d.} &= \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} [R \operatorname{sen} f + S(1+e \cos f)] \\ \dot{e}_{f.d.} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} [R \operatorname{sen} f + S \frac{(e+2 \cos f + e \cos^2 f)}{(1+e \cos f)}] \end{aligned} \quad (15)$$

$$\ddot{\omega}_{f.d.} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} \left[-R \cos f + S \frac{(2+e \cos f)}{(1+e \cos f)} \sin f \right]$$

$$\dot{\epsilon}_{f.d.} = \frac{2(1-e^2)}{na} R + \frac{e^2}{1+e\sqrt{1-e^2}} \ddot{\omega}_{f.d.}$$

e para o ângulo ressonante $\dot{\phi}_{f.d.}$, a equação é dada por

$$\dot{\phi}_{f.d.} = (j+k)\dot{\epsilon}_{f.d.} - k\ddot{\omega}_{f.d.} \quad (16)$$

onde, R e S são as componentes radial e transversal da aceleração dada pela força dissipativa. O uso das equações de Gauss para se determinar a contribuição dissipativa às equações de movimento advém do fato de que as expressões algébricas para o arrasto gasoso são mais facilmente calculáveis em suas componentes radial e transversal.

Considera-se um modelo para o arrasto do gás (genérico) do tipo

$$\vec{F}_{f.d.} = -CV^b \vec{V} \quad (17)$$

onde, $\vec{V} = \vec{v} - \alpha \vec{v}_k$

O parâmetro C é chamado coeficiente de arrasto e está relacionado a propriedades físicas do gás e a massa e raio do planetésimo. O parâmetro α mede a razão entre a velocidade circular do gás e a velocidade Kepleriana em um mesmo ponto e usualmente é tomado como $\alpha = 0.995$ (Adachi et al. 1976). \vec{v} é a velocidade do planetésimo e \vec{v}_k é a velocidade Kepleriana no mesmo ponto. As componentes da aceleração para a expressão de arrasto genérico serão dadas por (Gomes, 1995)

$$R = -CV^b \frac{na(1+e \cos f)}{\sqrt{1-e^2}} \quad (18)$$

$$S = -CV^b \frac{na^{3/2}(1+e \cos f) - \alpha na^{3/2} \sqrt{1+e \cos f}}{\sqrt{a(1-e^2)}} \quad (19)$$

onde,

$$V^2 = \frac{\mu}{a(1-e^2)} \{ e^2 \sin^2 f + [(1+e \cos f) - \alpha \sqrt{1+e \cos f}]^2 \} \quad (20)$$

e $\mu = n^2 a^3$. Duas expressões para a força dissipativa são consideradas nos estudos de formação do Sistema Solar (Patterson 1987): arrasto Stokes, cuja expressão é: $\vec{F}_{f.d.} = -C\vec{V}$ ($b=0$) e arrasto V^2 cuja expressão é: $\vec{F}_{f.d.} = -CV\vec{V}$ ($b=1$). O coeficiente

da força dissipativa está relacionado com o tamanho do raio do planetésimo pela expressão $C = \frac{4.5\eta}{\rho_p S^2}$ (arrasto Stokes) e $C = \frac{0.165\rho_{gas}}{S\rho_p}$ (arrasto V^2). C tem dimensão $[T]^{-1}$ para o arrasto Stokes e $[L]^{-1}$ para o arrasto V^2 . Os parâmetros físicos η , ρ e S são a viscosidade do gás, densidade e raio do planetésimo, respectivamente.

O parâmetro que define qual das duas expressões de força deve ser usada é o número de Reynolds, cuja expressão é: $R_e = \frac{2\rho_g VS}{\eta}$ onde, ρ_g é a densidade do gás. Para valores altos do número de Reynolds ($R_e > 1000$) a aceleração do arrasto é melhor modelada pelo arrasto V^2 e para valores baixos do número de Reynolds ($R_e < 10$) esta é melhor modelada pelo arrasto Stokes (Adachi, 1976, Patterson, 1986). Assim a escolha da expressão de força a ser usada depende de parâmetros físicos da nebulosa e do planetésimo. Da mesma maneira que Patterson, nós consideramos o arrasto Stokes no processo de formação do Sistema Solar como tendo sobre os planetésimos na região onde se formaram os planetas jovianos e o arrasto V^2 para a região onde se formaram os planetas terrestres. Esta consideração vem do fato da densidade na nebulosa solar e velocidade dos planetésimos serem maiores na região dos planetas terrestres do que na região dos planetas jovianos. Contudo para parâmetros físicos padrões da nebulosa solar, em alguns casos os planetésimos capturados experimentam um regime de arrasto intermediário ($10 < R_e < 1000$) (Mothé-Diniz e Gomes 2000).

É importante notar que os termos dissipativos $\dot{\omega}_{f.d.}$ e $\dot{\phi}_{f.d.}$ acrescidos às Eqs. (14), (escrita de forma genérica) não serão considerados nos cálculos do método de 1ª ordem nos pequenos parâmetros (μ e C), pois estes termos têm média nula quando integrados em um período sinódico. Além disso, deve ser observado que durante o desenvolvimento do método não foi feita nenhuma aproximação na expressão da função perturbadora, sendo assim, o método de 1ª ordem deverá dar resultados satisfatórios para os casos onde a excentricidade do planeta (e planetésimos) alcança valores altos.

2.1.1. Definição de solução de equilíbrio corrotacional e desenvolvimento genérico do método

Define-se um ponto de equilíbrio corrotacional como sendo uma solução do sistema de equações: $\langle \dot{a} \rangle = \langle \dot{e} \rangle = \langle \dot{\omega} \rangle = \langle \dot{\phi} \rangle = 0$, onde a média é tomada sobre um período sinódico T . Definindo uma variável genérica $\vec{\xi}$ definida por $\vec{\xi} = (a, e, \omega, \phi) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ e da definição de ponto de equilíbrio dada acima, tem-se, para cada componente de $\vec{\xi}$

$$\langle \dot{\xi}_i \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{\xi}_i dt = \frac{1}{T} [\xi_i(T) - \xi_i(0)] = 0 \quad (i = 1, \dots, 4) \quad (21)$$

implicando em $\xi_i(T) = \xi_i(0)$. Isto significa que uma órbita definida por um ponto de equilíbrio corrotacional é periódica sobre o período sinódico T .

Considerando um ponto genérico $\vec{\xi}_0 = (a_0, e_0, \omega_0, \phi_0)$ na vizinhança de um ponto corrotacional exato pode-se definir um funcional $F_i(\vec{\xi}_0)$ dado por

$$\begin{aligned} F_1(\vec{\xi}_0) &= \langle \dot{a}(\vec{\xi}_0) \rangle \neq 0 \\ F_2(\vec{\xi}_0) &= \langle \dot{e}(\vec{\xi}_0) \rangle \neq 0 \\ F_3(\vec{\xi}_0) &= \langle \dot{\omega}(\vec{\xi}_0) \rangle \neq 0 \\ F_4(\vec{\xi}_0) &= \langle \dot{\phi}(\vec{\xi}_0) \rangle \neq 0 \end{aligned} \quad (22)$$

ou genericamente

$$F_i(\vec{\xi}_0) = \langle \dot{\rho}_i(\vec{\xi}_0) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{\xi}_i dt \neq 0 \quad (i = 1, \dots, 4) \quad (23)$$

Como as equações de movimento ($\dot{\xi}_i(\vec{\xi}_0)$) estão escritas em função das variáveis de frequência rápida u e u_p , torna-se conveniente trocar a variável t pela variável u na integral acima, obtendo-se assim

$$F_i(\vec{\xi}_0) = \langle \dot{\xi}_i(\vec{\xi}) \rangle = \frac{n}{2\pi\eta} \int_0^{2\pi\eta} \frac{\dot{\xi}_i}{\dot{u}} du \quad (24)$$

A expressão para a derivada temporal da anomalia excêntrica é dada por

$$\dot{u} = \frac{n}{1 - e \cos u} \quad (25)$$

e as variáveis u e u_p estarão relacionadas pela expressão

$$\dot{u}_p = \frac{n}{n_p} \frac{1 - e \cos u}{1 - e_p \cos u_p} \dot{u} \quad (26)$$

Nestas variáveis a integração pára quando a anomalia excêntrica do planetésimo se iguala a $2\pi j$ e simultaneamente a anomalia excêntrica do planeta se iguala a $2\pi(j+k)$. As integrações das equações, calculadas em um período sinódico, são feitas numericamente usando o integrador ODE (Shampine e Gordon 1975).

Tomando $\bar{\xi}_j = (a_j, e_j, \varpi_j, \phi_j)$ como um valor arbitrário inicial na vizinhança de uma solução exata, define-se f_i por:

$$F_i(\bar{\xi}_j) = f_i \quad (i=1, \dots, 4) \quad (27)$$

Os pontos de equilíbrio são determinados numericamente mediante uso do método de Newton. Assim, correções à aproximação $\bar{\xi}_j$ dos pontos corrotacionais serão dados pelas soluções do sistema de equações

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial a} \Big|_{(\bar{\xi}_j)} \Delta a + \frac{\partial F_1}{\partial e} \Big|_{(\bar{\xi}_j)} \Delta e + \frac{\partial F_1}{\partial \varpi} \Big|_{(\bar{\xi}_j)} \Delta \varpi + \frac{\partial F_1}{\partial \phi} \Big|_{(\bar{\xi}_j)} \Delta \phi &= -f_1 \\ \frac{\partial F_2}{\partial a} \Big|_{(\bar{\xi}_j)} \Delta a + \frac{\partial F_2}{\partial e} \Big|_{(\bar{\xi}_j)} \Delta e + \frac{\partial F_2}{\partial \varpi} \Big|_{(\bar{\xi}_j)} \Delta \varpi + \frac{\partial F_2}{\partial \phi} \Big|_{(\bar{\xi}_j)} \Delta \phi &= -f_2 \\ \frac{\partial F_3}{\partial a} \Big|_{(\bar{\xi}_j)} \Delta a + \frac{\partial F_3}{\partial e} \Big|_{(\bar{\xi}_j)} \Delta e + \frac{\partial F_3}{\partial \varpi} \Big|_{(\bar{\xi}_j)} \Delta \varpi + \frac{\partial F_3}{\partial \phi} \Big|_{(\bar{\xi}_j)} \Delta \phi &= -f_3 \\ \frac{\partial F_4}{\partial a} \Big|_{(\bar{\xi}_j)} \Delta a + \frac{\partial F_4}{\partial e} \Big|_{(\bar{\xi}_j)} \Delta e + \frac{\partial F_4}{\partial \varpi} \Big|_{(\bar{\xi}_j)} \Delta \varpi + \frac{\partial F_4}{\partial \phi} \Big|_{(\bar{\xi}_j)} \Delta \phi &= -f_4 \end{aligned} \quad (28)$$

Dessa forma cada $(j+1)$ -ésima solução, dada por $a_{j+1} = a_j + \Delta a$, $e_{j+1} = e_j + \Delta e$, $\varpi_{j+1} = \varpi_j + \Delta \varpi$ e $\phi_{j+1} = \phi_j + \Delta \phi$ substitui a solução anterior e o processo é iterado até que um ponto satisfaça a condição: $\left| \frac{\xi_{i,j+1} - \xi_{i,j}}{\xi_{i,j}} \right| < 10^{-\delta}$, (para todo $i = 1, \dots, 4$). δ dá a precisão para a determinação do ponto corrotacional calculado.

As derivadas dos F_i nas Eqs. (28) introduzem derivadas segundas em relação a função perturbadora a qual, como foi definida anteriormente, está escrita em função do conjunto de variáveis (a, e, ϖ, ϕ) . As derivadas segundas das derivadas primeiras $\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a}$, $\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e}$, $\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \varpi}$ e $\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial M}$ em relação as variáveis a e e são diretas e as derivadas segundas em relação as variáveis ω^* e ϕ serão dadas por

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \mathcal{R}^*}{\partial e \partial \varpi^*} &= \frac{\partial^2 \mathcal{R}}{\partial e \partial \varpi} - \frac{j}{j+k} \frac{\partial^2 \mathcal{R}}{\partial e \partial M} \\
 \frac{\partial^2 \mathcal{R}^*}{\partial e \partial \phi} &= \frac{1}{j+k} \frac{\partial^2 \mathcal{R}}{\partial e \partial M} \\
 \frac{\partial^2 \mathcal{R}^*}{\partial \omega^{*2}} &= \frac{\partial^2 \mathcal{R}}{\partial \varpi^2} - 2 \frac{j}{j+k} \frac{\partial^2 \mathcal{R}}{\partial \varpi \partial M} + \left(\frac{j}{j+k}\right)^2 \frac{\partial^2 \mathcal{R}}{\partial M^2} \\
 \frac{\partial^2 \mathcal{R}^*}{\partial \omega^* \partial \phi} &= \frac{1}{j+k} \frac{\partial^2 \mathcal{R}}{\partial \varpi \partial M} \\
 \frac{\partial^2 \mathcal{R}^*}{\partial M \partial \varpi^*} &= \frac{\partial^2 \mathcal{R}}{\partial M \partial \varpi} - \frac{j}{j+k} \frac{\partial^2 \mathcal{R}}{\partial M^2} \\
 \frac{\partial^2 \mathcal{R}^*}{\partial M \partial \phi} &= \frac{1}{j+k} \frac{\partial^2 \mathcal{R}}{\partial M^2}
 \end{aligned} \tag{29}$$

Além de determinar a solução (com a precisão desejada) pode-se também determinar a estabilidade desta, ou seja, se o ponto de equilíbrio é estável ou instável. Para isso calcula-se os autovalores $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ da equação característica dada por, $\det(J - \lambda I) = 0$, onde J é a matriz Jacobiana definida como

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial a} & \frac{\partial F_1}{\partial e} & \frac{\partial F_1}{\partial \varpi} & \frac{\partial F_1}{\partial \phi} \\ \frac{\partial F_2}{\partial a} & \frac{\partial F_2}{\partial e} & \frac{\partial F_2}{\partial \varpi} & \frac{\partial F_2}{\partial \phi} \\ \frac{\partial F_3}{\partial a} & \frac{\partial F_3}{\partial e} & \frac{\partial F_3}{\partial \varpi} & \frac{\partial F_3}{\partial \phi} \\ \frac{\partial F_4}{\partial a} & \frac{\partial F_4}{\partial e} & \frac{\partial F_4}{\partial \varpi} & \frac{\partial F_4}{\partial \phi} \end{pmatrix}_{\bar{x}_0} \tag{30}$$

onde, I é a matriz unitária 4×4 , em que os F_i são calculados para as soluções encontradas, ou seja, para a última iteração feita. Assim, é definido como ponto de equilíbrio estável uma solução que tem todas as partes reais dos autovalores negativas e ponto de equilíbrio instável uma solução que tem pelo menos uma parte real de qualquer autovalor positiva.

Para determinar os pontos corrotacionais toma-se um valor inicial arbitrário C (coeficiente de arrasto) e o seu valor associado (ξ_0). Após determinarmos o primeiro ponto os outros são facilmente determinados variando o valor de C . Um valor já obtido pode também ser útil para se determinar os pontos corrotacionais para outros valores de excentricidade ou massa do planeta. O ponto inicial precisará ser calculado por algum outro processo, como uma determinação vinda de função perturbadora truncada (Beaugé & Ferraz-Mello, 1992) ou através de integração numérica.

2.1.2. Aplicação do método semi-numérico de 1ª ordem

Para verificar a validade e precisão dos resultados dados pelo método desenvolvido, nós começamos determinando os pontos corrotacionais para as ressonâncias 3:4 (Fig. 2.1), 2:3 (Fig. 2.2) e 1:2 (Fig. 2.3). Nestes três casos foi considerado como perturbador, Júpiter com massa $m = \frac{m_J}{M_{Sol}} = \frac{1}{1047,355}$ e órbita fixa com elementos orbitais: $a=5,2UA$, $e=0,05$ e $\varpi = 0,0$. Como modelo para a força dissipativa foi considerado o arrasto *Stokes* para todos os casos acima.

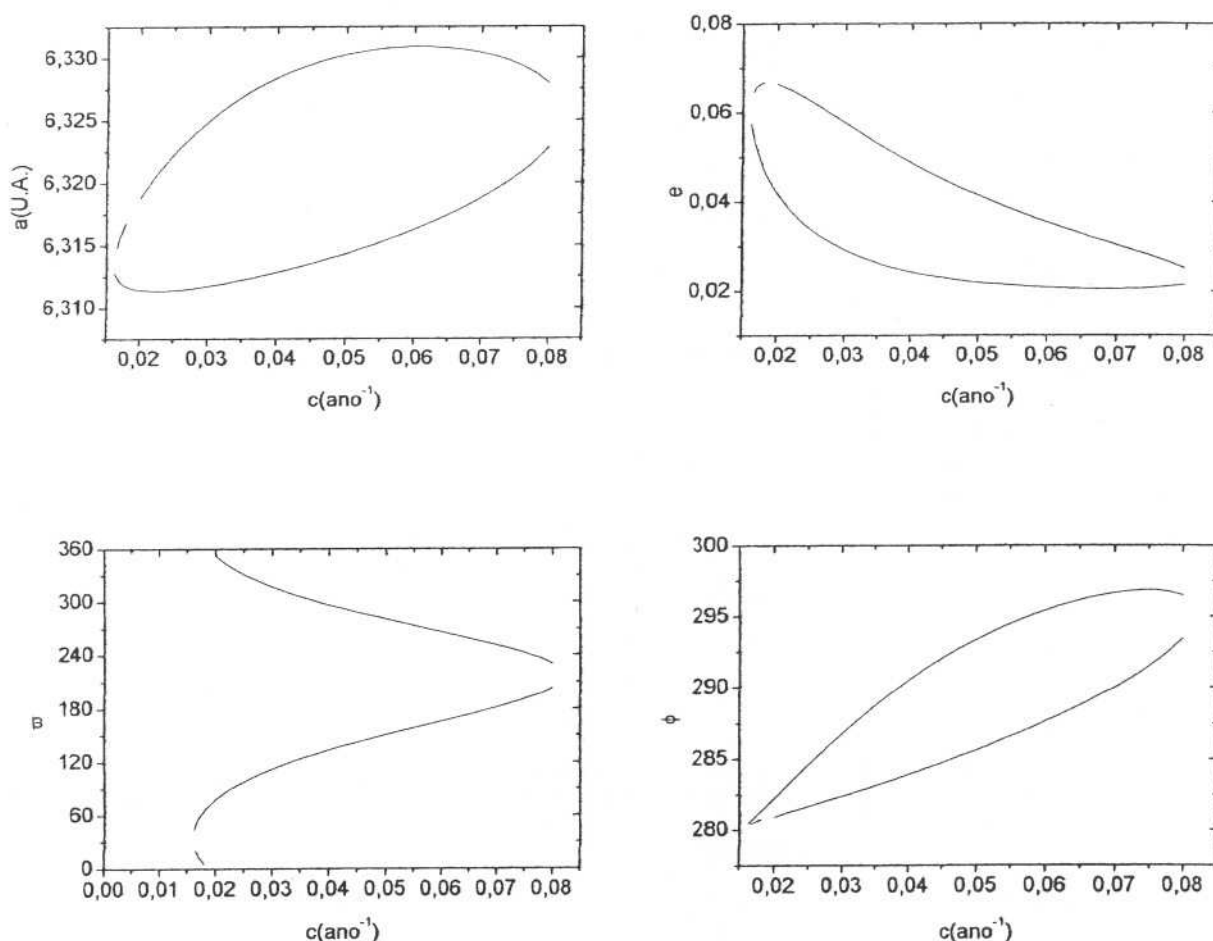


Figura 2.1. Elementos orbitais a , e , ϖ e ϕ em função do coeficiente de arrasto C correspondente aos pontos corrotacionais da ressonância 3:4, com um planeta de massa $m = \frac{m_J}{M} = \frac{1}{1047,355}$ e órbita fixa com elementos orbitais: $a = 5,2UA$, $e = 0,05$ e $\varpi = 0,0$.

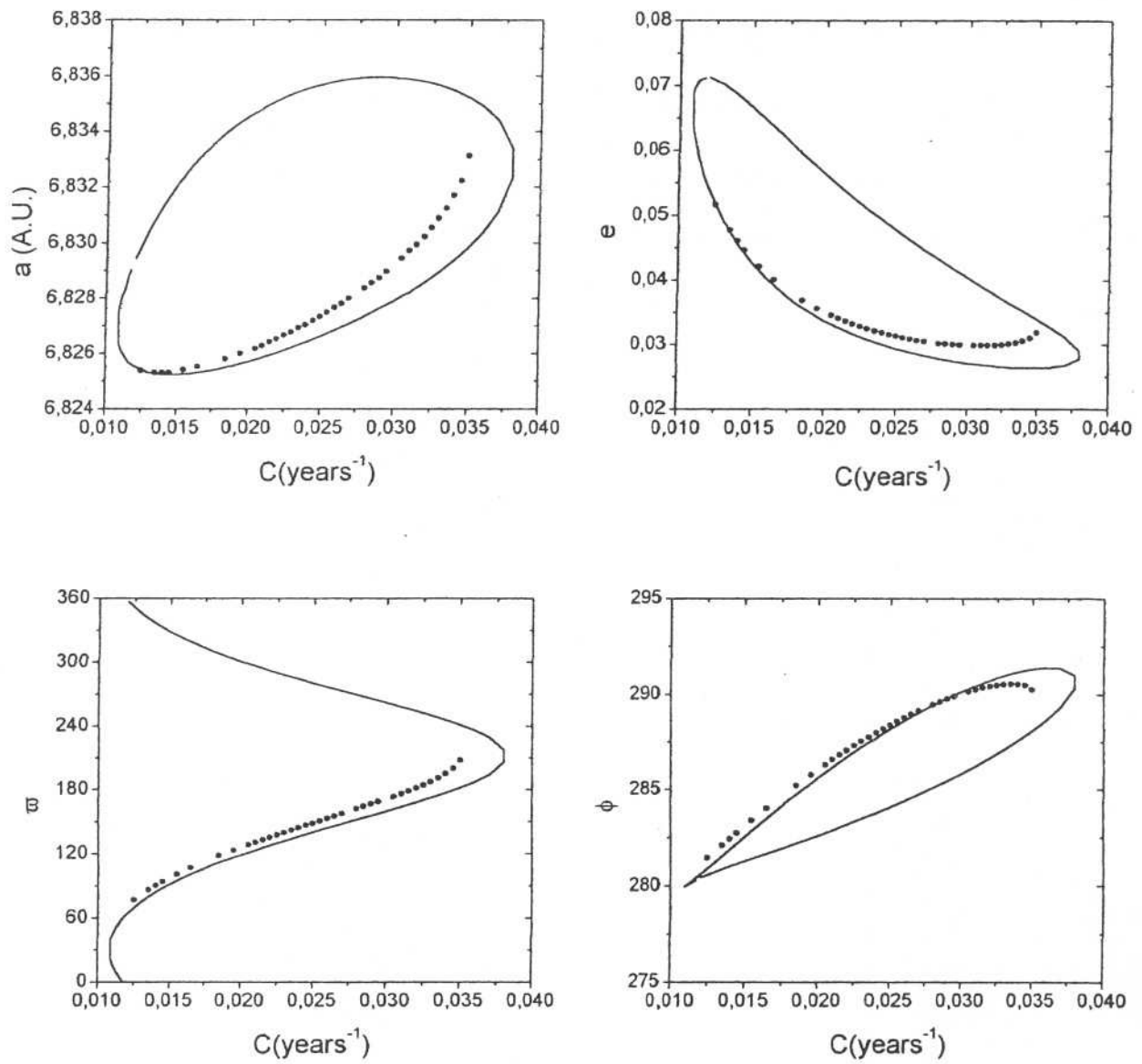


Figura 2.2. Mesmo que Fig. 2.1 para a ressonância 2:3. As soluções representadas pela linha contínua representam os pontos obtidos pelo método de 1ª ordem e com círculos escuros os pontos obtidos pela integração numérica.

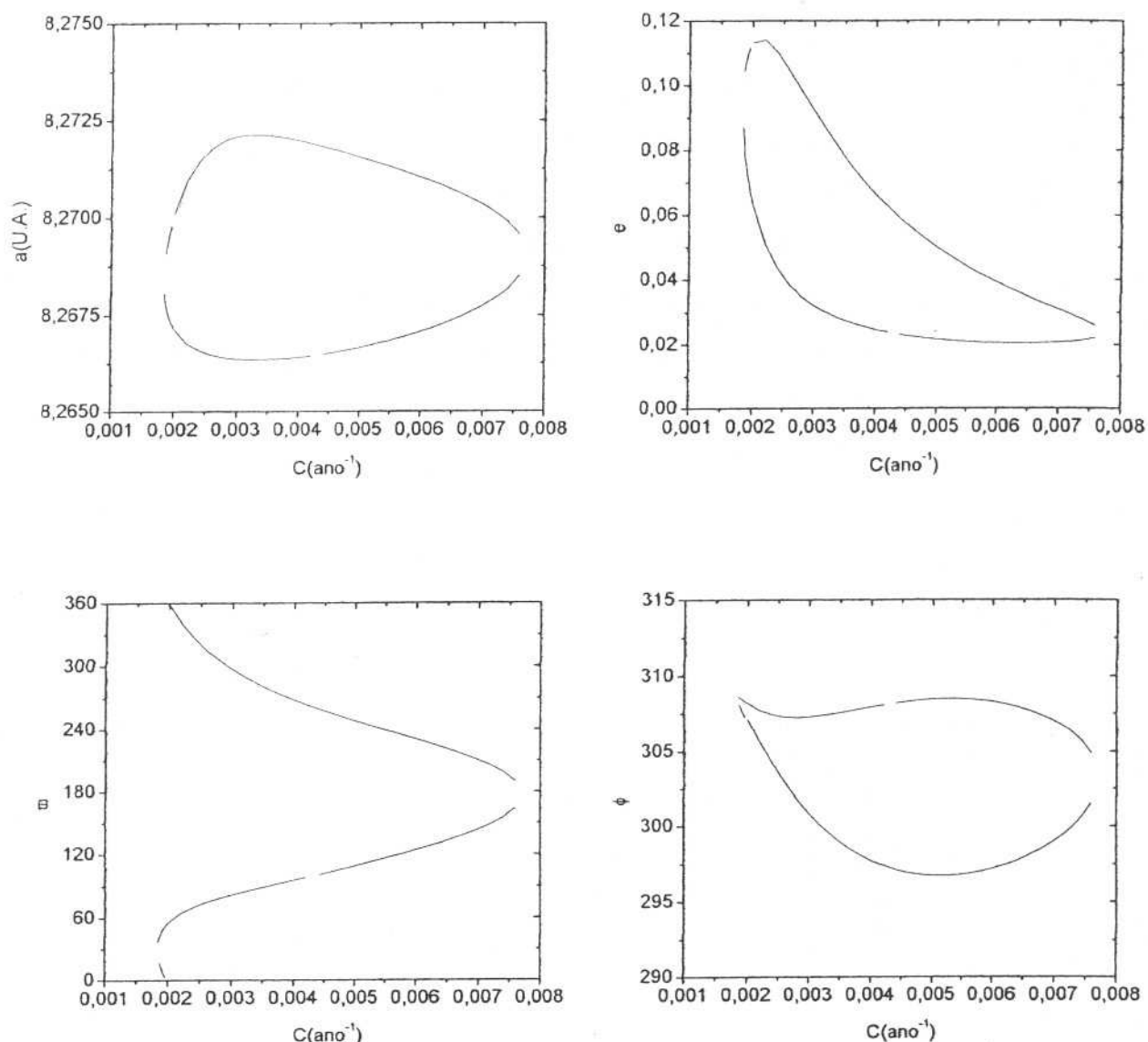


Figura 2.3. Pontos corrotacionais para a ressonância 1:2. Elementos orbitais do planeta como na Fig. 2.1.

Observa-se que há uma boa concordância entre os pontos obtidos pelo método com os pontos obtidos mediante integração numérica (ver a Figura 2.2). Para determinar estes pontos (indicado com pontos) nós realizamos uma integração numérica das equações completas, considerando-se Sol, Júpiter e planetésimo, com força dissipativa, até o planetésimo permanecer em uma órbita estável durante um longo intervalo de tempo (da ordem de 10^5 anos). A seguir tomamos uma média de cada elemento orbital considerando um intervalo para a parte estável da órbita. Nas integrações numéricas usamos o integrador *RADAU* de ordem 16 (Everhart 1985).

Observe pela Figura 2.2 que as soluções numéricas encontram-se somente em um dos ramos dos 4 gráficos o que indica que estes ramos são as soluções estáveis para cada ressonância. Como foi mostrado no desenvolvimento do método, que a estabilidade das soluções podem ser estudadas determinando-se os autovalores da matriz Jacobiana e analisando a parte real dos mesmos. Abaixo, por exemplo, são dados os autovalores para duas soluções ($C = 0,025anos^{-1}$) referentes a ressonância 2:3 (ver a Figura 2.2). Um autovalor com parte real positiva, como mostra a tabela, é responsável pela instabilidade da solução.

Solução estável:

parte real do autovalor	parte imaginária do autovalor
-0.0073110843	0.0170257786
-0.0073110843	-0.0170257786
-0.0184823249	0.0000000000
-0.0129483613	0.0000000000

Solução instável:

parte real do autovalor	parte imaginária do autovalor
0.0293986831	0.0000000000
-0.0152337225	0.0096334403
-0.0152337225	-0.0096334403
-0.0210330994	0.0000000000

As Figuras 2.4 (a) e (b) mostram a integração numérica de uma órbita estável e uma instável, respectivamente, para aproximadamente dois períodos sinódicos. Mostramos assim, como foi discutido na seção 2.1.1, que podemos determinar com o método desenvolvido além do ponto de equilíbrio a estabilidade de uma solução sem o auxílio da integração numérica da órbita.

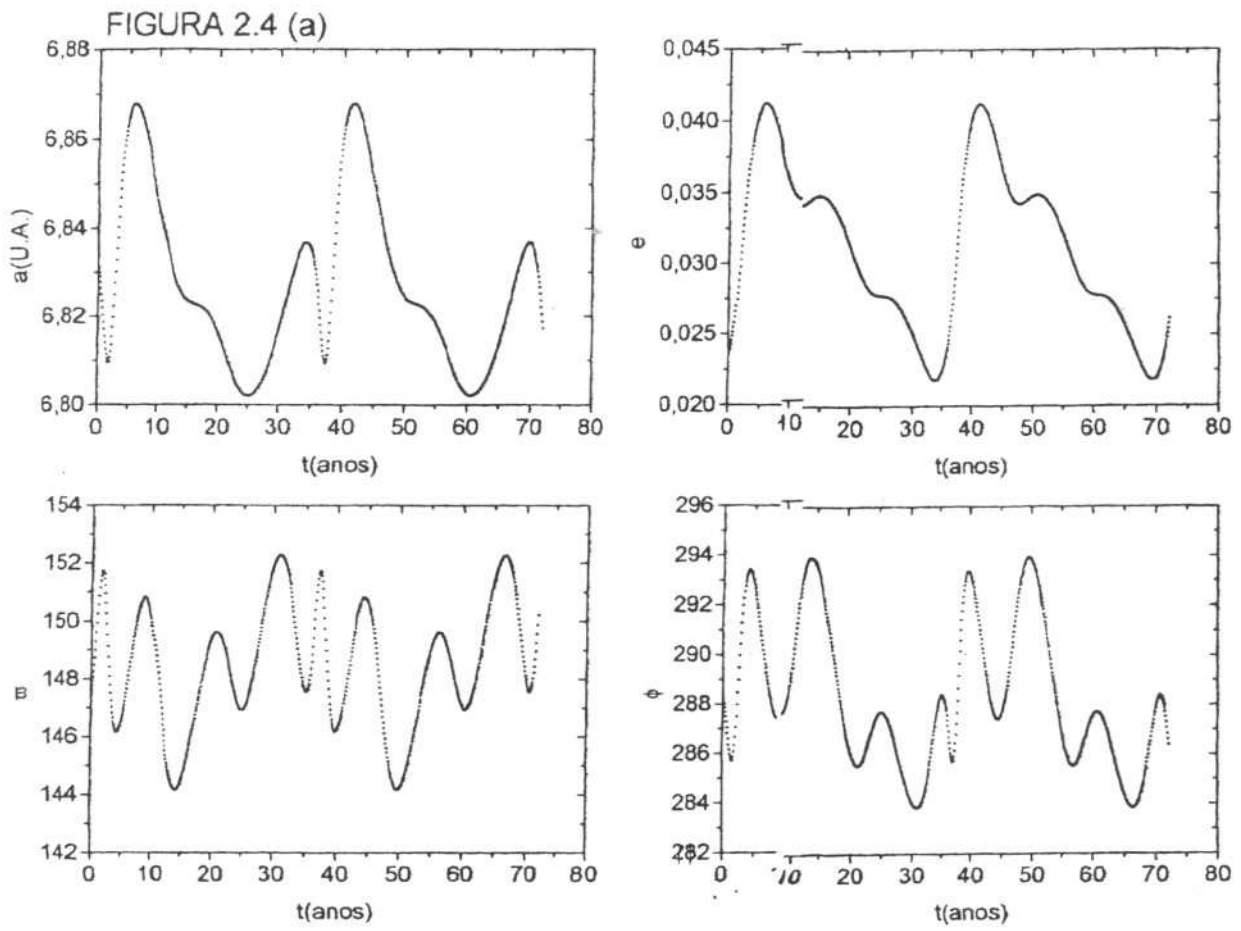


Figura 2.4 (a). Variação dos elementos orbitais em função do tempo para a órbita de um planetésimo num ponto de equilíbrio estável.

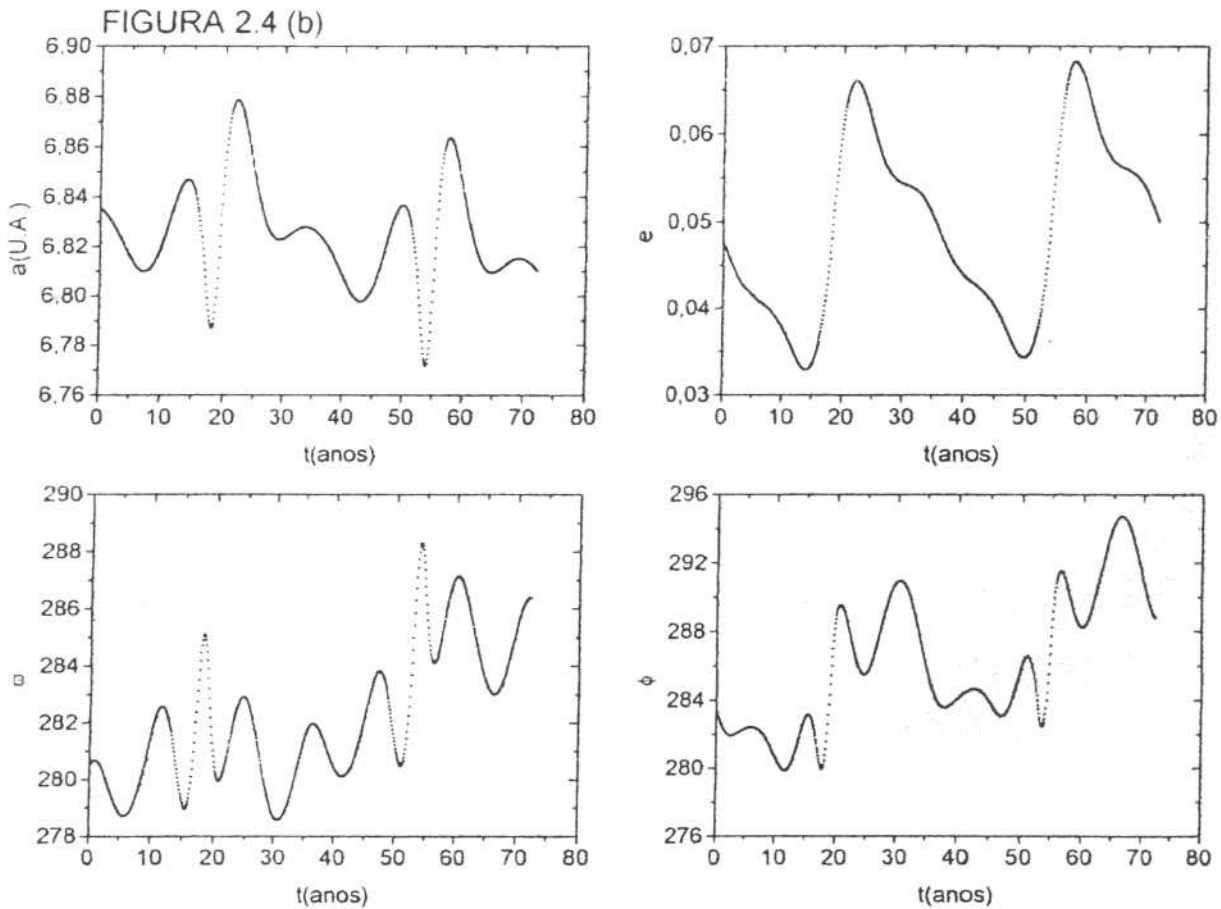


Figura 2.4 (b). Variação dos elementos orbitais em função do tempo para a órbita de um planetésimo num ponto de equilíbrio instável (b).

Observa-se ainda que quanto mais afastada é a ressonância (1:2 é a mais afastada dentre as três) maior é o tamanho do planetésimo capturado (o raio é inversamente proporcional a constante da força dissipativa). Isto ocorre pois, durante a queda orbital os planetésimos menores sofrem um arrasto muito forte passando assim pelas ressonâncias mais exteriores como, por exemplos, a 1:3 ($a = 10,81UA$), a 2:5 ($a = 9,57UA$) e a 1:2 ($a = 8,25UA$) sendo somente capturados nas ressonâncias mais próximas ao perturbador como, por exemplos, a 3:4 ($a = 6,29UA$) e a 2:3 ($a = 6,81UA$). Nas ressonâncias mais próximas o efeito gravitacional do planeta é maior podendo assim, contrabalançar a queda orbital e capturá-los.

A seguir, testamos o método para o caso do perturbador com uma excentricidade alta ($e=0,2$) pois isto faria com que a órbita do planetésimo capturados fosse altamente excêntrica também. A Figura 2.5 mostra as soluções para este caso considerando mesma massa, semi-eixo maior e longitude do planeta como anteriormente. Isto confirma que o método também dá resultados satisfatórios para o caso de excentricidades planetárias altas.

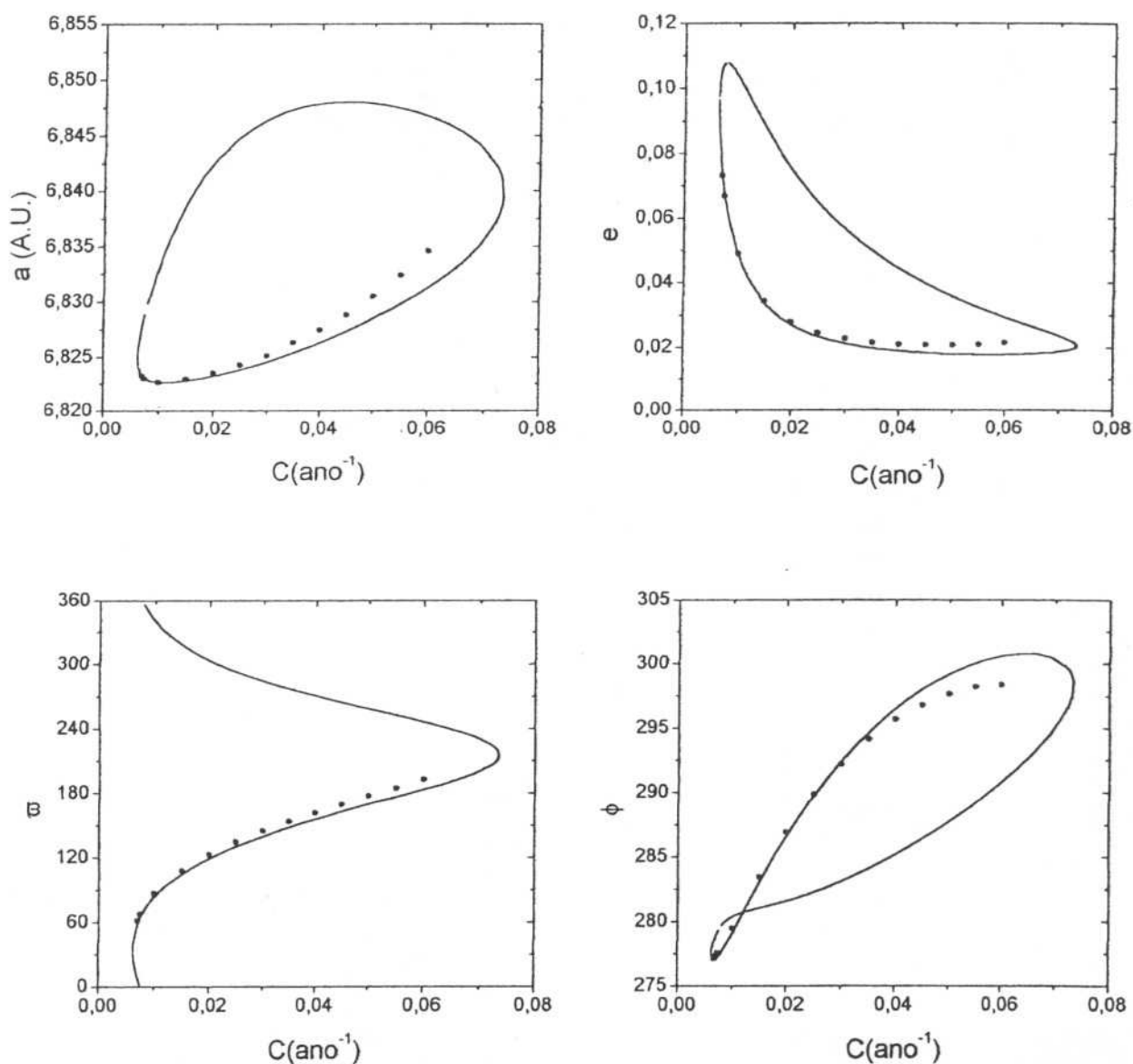


Figura 2.5. Mesmo que Fig. 2.1, para um planeta com órbita de excentricidade igual a 0,2.

Visando dar uma maior aplicabilidade ao método aplicamos o mesmo para ressonâncias de 2ª ordem. Assim, procuramos determinar os pontos de equilíbrio para a ressonância 5:7 considerando o perturbador como descrito no 1º exemplo pois em um trabalho recente, Mothé-Diniz e Gomes (2000) encontraram capturas extensas para esta particular comensurabilidade. Nós observamos uma grande discordância entre os pontos, quando comparamos com a integração numérica (ver a Figura 2.6). Esta discrepância ocorre devido a ressonância 5:7 ser um exemplo de ressonância extensa.

Para este caso particular de ressonância, o método desenvolvido não dá resultados satisfatórios devido a sua limitação em primeira ordem na massa, enquanto que as ressonâncias extensas são fortemente dependente da massa do planeta. Essa limitação é responsável pela discrepância entre os pontos dos gráficos observados na Figura 2.6. Mostraremos, na seção seguinte, que uma modificação no método dará resultados satisfatórios para este caso.

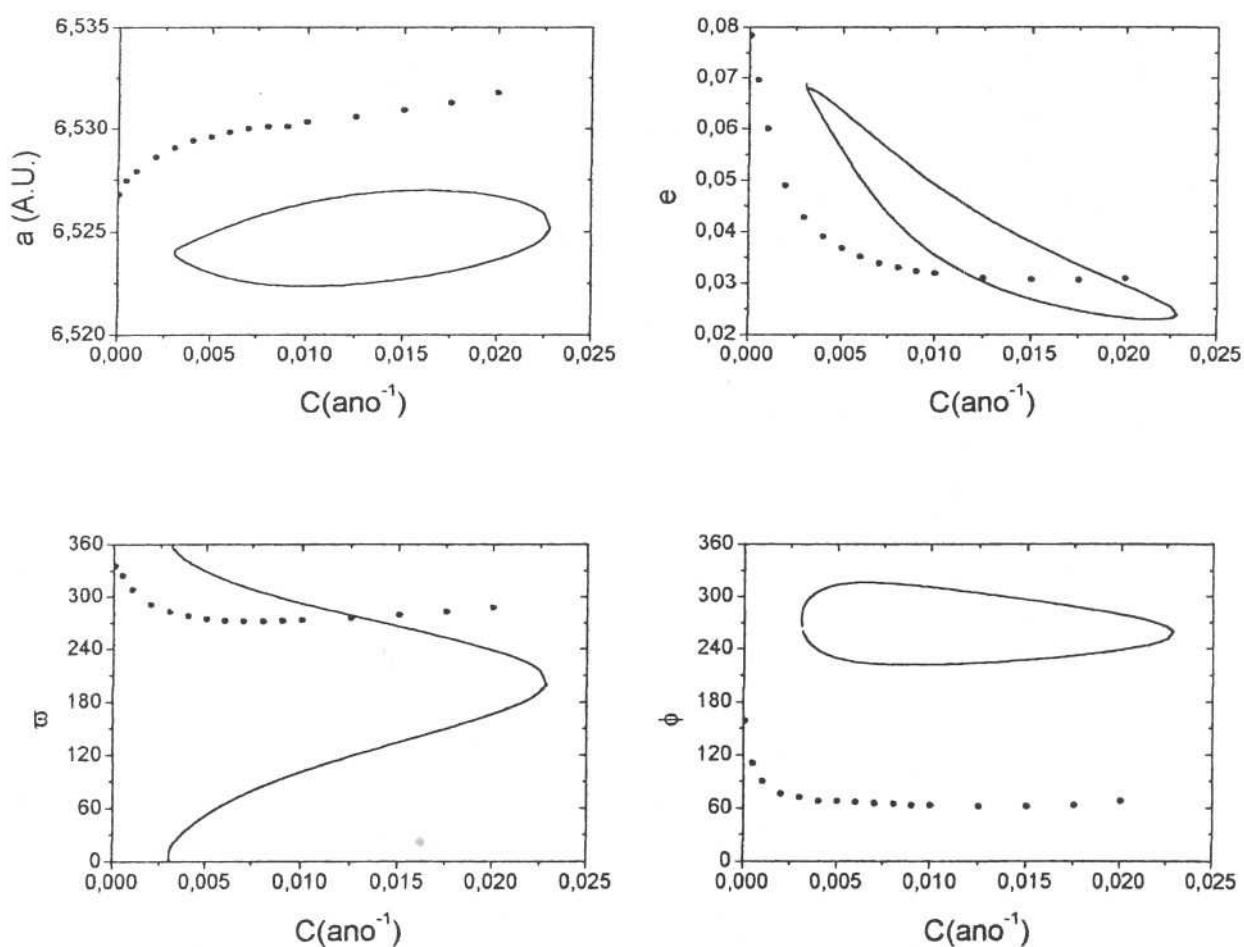


Figura 2.6. Mesmo que Fig. 2.1 só que para a ressonância 5:7.

A ressonância corrotacional extensa foi primeiramente encontrada por Mothé-Diniz e Gomes (2000) em um estudo numérico sobre a ressonância corrotacional e as soluções analíticas ainda não foram determinadas. Nós mostraremos, no capítulo seguinte, que uma modificação no método resulta na obtenção destes pontos com muito boa acuidade. Uma característica que foi observada por Mothé-Diniz e Gomes (2000) sobre este tipo de ressonância é que não há um "limite máximo" para os tamanhos dos planetesimos capturados, ou seja, os valores do coeficiente de arrasto vão, continuamente, de um valor máximo até zero. Isto pode ser observado na Figura 2.6, pela continuidade dos pontos obtidos pela integração numérica até aproximadamente $C=0$.

É importante notar que para as capturas não extensas, planetesimos capturados em um mesmo ponto irão acumular, crescer e migrar até um ponto limite (ver, por exemplo, a Figura 2.1). A partir deste limite, se mais planetesimos forem acrescentados, o planetesimo final escapará da ressonância corrotacional mas continuará capturado em libração. Já para as ressonâncias extensas, planetesimos capturados em um mesmo ponto vão acumular, crescer e migrar para um outro ponto "indefinidamente" sem sair da ressonância corrotacional e este fato pode ser importante para acelerar a acreção dos planetesimos em pontos de corrotação.

Como último exemplo para as ressonâncias exteriores, nós determinamos os pontos de equilíbrio para a ressonância 7:9 onde duas massas para o planeta foram consideradas: $m = \frac{1}{3150}$ ($\sim 33\%M_J$) $m = \frac{1}{4500}$ ($\sim 23\%M_J$) com a mesma órbita considerada no 1^o exemplo. Pode ser observado da Figura 2.7 que uma variação na massa acarreta somente uma pequena variação na localização dos pontos. Entretanto, observamos que os pontos determinados pelo método de 1^a ordem não dá resultados satisfatórios para alguns valores de massa pois em alguns casos esta variação levou a corrotação extensa. Exemplificaremos este fato com a ressonância 7:9 e massa $m = \frac{1}{3500}$ na seção seguinte. Em todos os casos acima foi considerado o arrasto *Stokes* como força dissipativa.

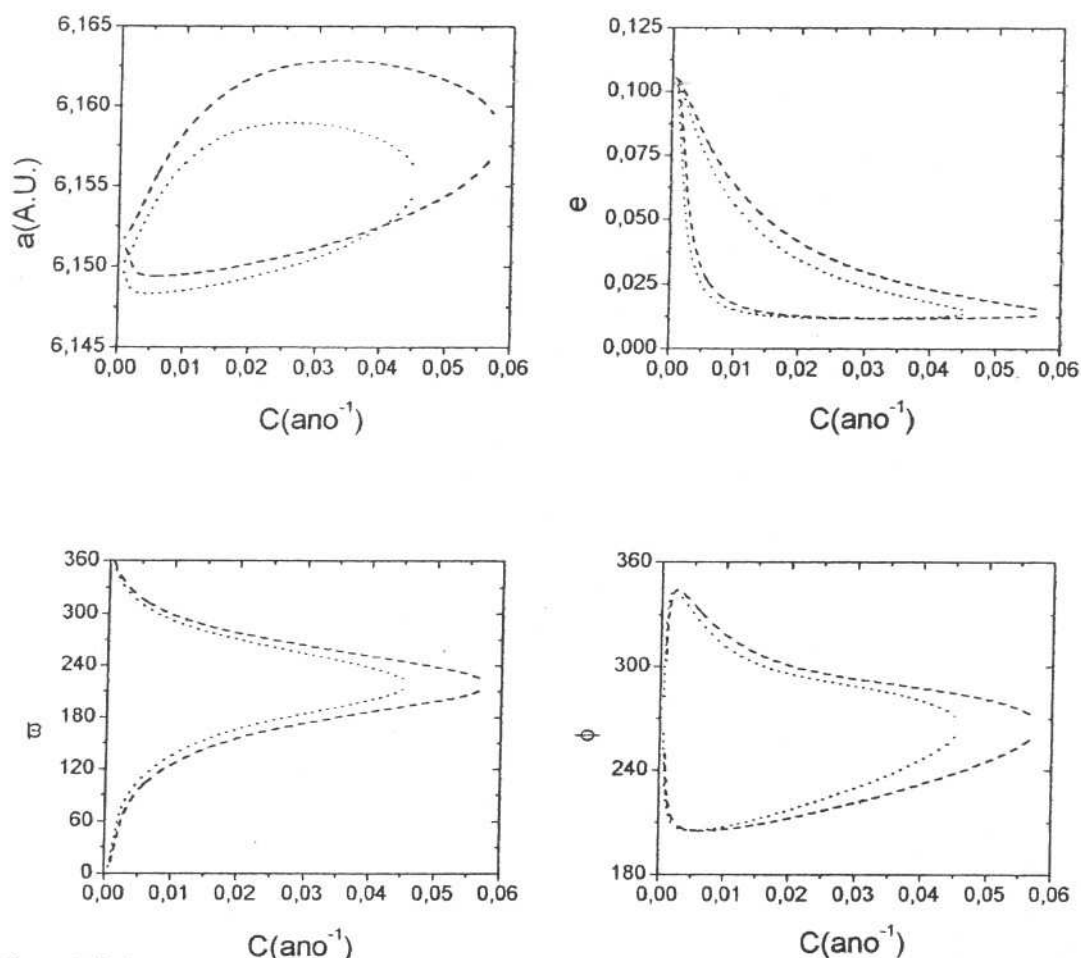


Figura 2.7. Pontos corrotacionais para a ressonância 7:9. Os pontos representados com traço menor foram obtidos com uma massa planetária igual a 1/4500 e com o traço maior com 1/3500. Elementos orbitais do planeta como na Fig. 2.1.

Embora os trabalhos anteriores (Beaugé e Ferraz-Mello 1983, Beaugé et al. 1999) não tivessem determinado os pontos corrotacionais para as ressonâncias interiores, usando métodos analíticos, estas capturas foram encontradas em simulações numéricas por Kary e Lissauer (1995) e Mothé-Diniz e Gomes (2000). Usando o método de primeira ordem, pudemos determinar as soluções de equilíbrio também para este caso. A Figura 2.8 mostra as soluções para a ressonância 3:2 considerando o arrasto V^2 como modelo de força dissipativa. Neste caso o perturbador foi considerado com massa: $m = \frac{1}{1047,355}$ e órbita fixa com elementos orbitais: $a = 5,2UA$, $e = 0,4$ e $\varpi = 0,0$. Observe que a ressonância 3:2 também é um exemplo de corrotação extensa e que para um valor muito pequeno do coeficiente de arrasto (ou seja, um planetésimo cada vez maior) a solução tende a um valor padrão.

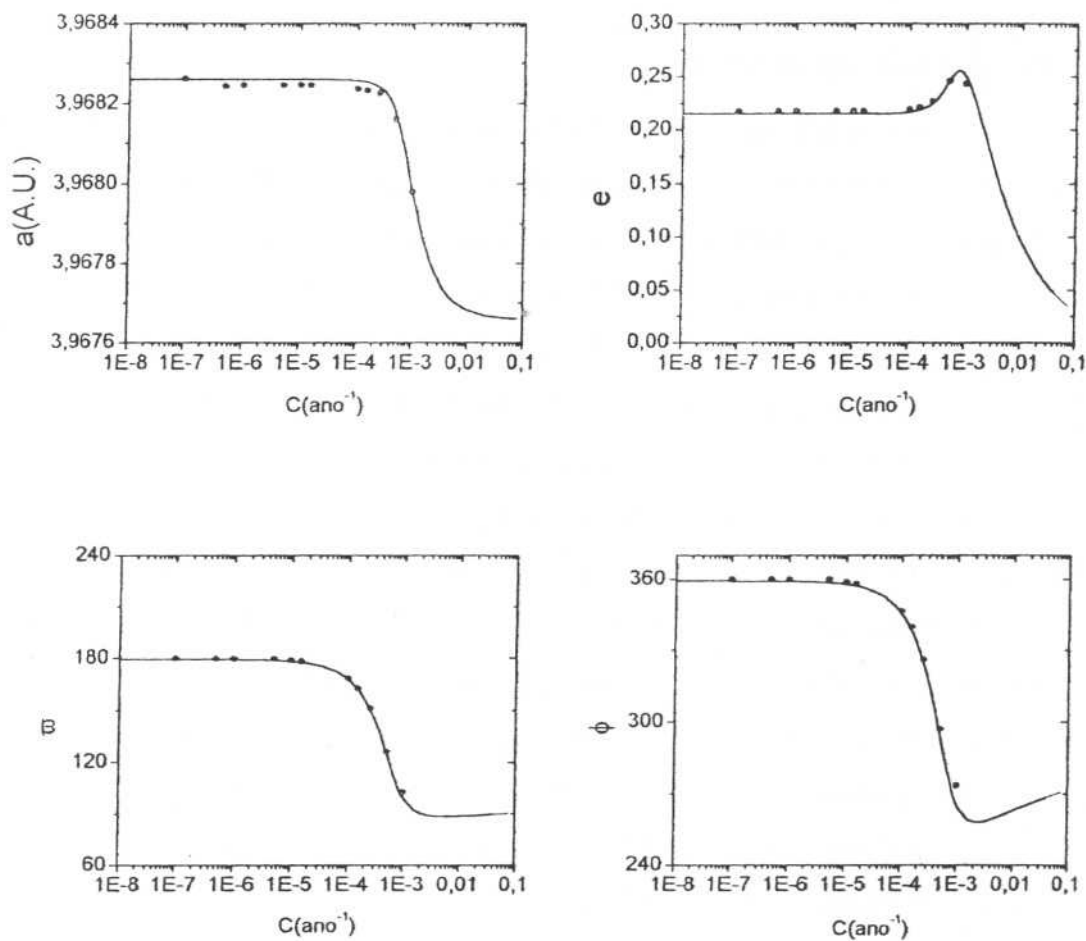


Figura. 2.8. Pontos corrotacionais para a ressonância 3:2, para um planeta com órbita de excentricidade igual a 0,4. Restante dos parâmetros como na Fig. 2.1.

Nós determinamos os pontos de equilíbrio para várias ressonâncias interiores (5:2, 5:3, 2:1, 4:3) sempre encontrando estas como extensas. Para ressonâncias internas não muito próximas ao planeta, nós conseguimos soluções para excentricidades planetárias variando de 0,1 até 0,6, assim tomamos 0,4 como um valor intermediário para exemplos.

2.2. O método numérico

Mostramos no capítulo anterior que o método semi-numérico, apesar de fornecer um novo resultado que foi a determinação de pontos corrotacionais para a ressonância interna, não conseguiu determinar (precisamente) estas soluções para o caso das ressonâncias extensas. Observamos que as soluções para este caso ficaram muito distantes dos valores obtidos mediante integração das equações completas para o problema de N-corpos com uma força dissipativa. Nós poderíamos ter optado por desenvolver um método de 2ª ordem como foi desenvolvido por Beaugé et al. (1999), entretanto, este desenvolvimento poderia ainda assim dar desvios dos valores calculados com relação aos obtidos numericamente (como pode ser observado na figura 2.6). Além do mais, este desenvolvimento exigiu uma segunda derivação das equações, resultando assim numa complicação extra e não houve ganho em tempo de processamento dos dados em relação ao método numérico. Diante destas razões, nós optamos por desenvolver um método genérico para determinar as soluções corretamente para todos os casos (exterior, interior e extensa), além do que com este método poderíamos aumentar a acuidade dos pontos determinados.

Para este método, faz-se uma integração numérica completa (ou seja, todas as variáveis variando ponto a ponto) das Eqs. (14) considerando os termos dissipativos $\dot{\omega}_{f.d.}$ e $\dot{\phi}_{f.d.}$ nestas equações. Este procedimento acarreta uma correção na expressão da derivada temporal da anomalia excêntrica (Eq. 25) a qual agora será dada por

$$\dot{u} = \frac{n + \dot{\sigma} + \dot{e} \sin u}{1 - e \cos u} \quad (31)$$

Uma outra mudança feita neste método em relação ao método de 1ª ordem é a definição dos funcionais F_i e suas derivadas em relação as variáveis do sistema (Eq. 28). No método de 1ª ordem os funcionais F_i e suas derivadas em relação as variáveis (a, e, ω, ϕ) são definidos como funções de variáveis médias, além disso as derivadas são calculadas analiticamente. O procedimento do método genérico de integrar as equações completas implica em uma nova definição para os funcionais F_i e suas derivadas. Dessa maneira os F_i são definidos como funções de variáveis iniciais, isto é, $F_i = (\xi_i(T) - \xi_i(0))/T$, onde $\bar{\xi}(0) = (a_0, e_0, \omega_0, \phi_0)$ e as derivadas são obtidas

numericamente. Para isto toma-se um ponto inicial $(a_0, e_0, \varpi_0, \phi_0)$ e um incremento arbitrariamente pequeno $(\delta a, \delta e, \delta \varpi, \delta \phi)$ para cada variável, tal que, o ponto dado por $(a_0 + \delta a, e_0 + \delta e, \varpi_0 + \delta \varpi, \phi_0 + \delta \phi)$ esteja na vizinhança do ponto inicial. Deste modo calcula-se as derivadas no ponto inicial numericamente por

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial F_i}{\partial a} \right|_{(\bar{\xi}_0)} &= \frac{F_i(a_0 + \delta a, e_0, \varpi_0, \phi_0) - F_i(a_0, e_0, \varpi_0, \phi_0)}{\delta a} \\ \left. \frac{\partial F_i}{\partial e} \right|_{(\bar{\xi}_0)} &= \frac{F_i(a_0 + \delta a, e_0 + \delta e, \varpi_0, \phi_0) - F_i(a_0, e_0, \varpi_0, \phi_0)}{\delta e} \\ \left. \frac{\partial F_i}{\partial \varpi} \right|_{(\bar{\xi}_0)} &= \frac{F_i(a_0 + \delta a, e_0, \varpi_0 + \delta \varpi, \phi_0) - F_i(a_0, e_0, \varpi_0, \phi_0)}{\delta \varpi} \\ \left. \frac{\partial F_i}{\partial \phi} \right|_{(\bar{\xi}_0)} &= \frac{F_i(a_0 + \delta a, e_0, \varpi_0, \phi_0 + \delta \phi) - F_i(a_0, e_0, \varpi_0, \phi_0)}{\delta \phi} \end{aligned} \quad (32)$$

e com isto obtêm-se todos os coeficientes das Eqs. (28) e da matriz Jacobiana, podendo assim determinar os pontos de equilíbrio e estudar a estabilidade das soluções encontradas.

O processo de convergência definido para o método de 1ª ordem é feito em relação às variáveis médias mas, devido a mudança na definição dos funcionais F_i , o processo de convergência será agora definido em relação aos valores iniciais de cada variável. Só após a convergência ter sido alcançada são então determinados os valores médios das variáveis.

O método genérico além de ser mais preciso que o de 1ª ordem mostrou ser também mais rápido no processo de convergência. Apesar disso, o método de 1ª ordem tem um interesse didático e também pode ser usado para determinar os pontos corrotacionais embora com menos acuidade.

2.2.1. Aplicação do método numérico

Para este método nós começamos determinando novamente as soluções dos exemplos considerados para o método de 1ª ordem. Com isto saberíamos se as soluções obtidas com o novo método seriam mais precisas e se com este método obteríamos as soluções corretas para o caso da corrotação extensa.

A Figura 2.9 mostra os pontos determinados para a ressonância 2:3. Observe que há uma melhor acuidade entre os pontos obtidos com o método genérico, em relação ao método de 1ª ordem. Seguindo os exemplos, é mostrado na Figura 2.10 que o método genérico fornece as soluções corretamente para o caso da ressonância extensa 5:7.

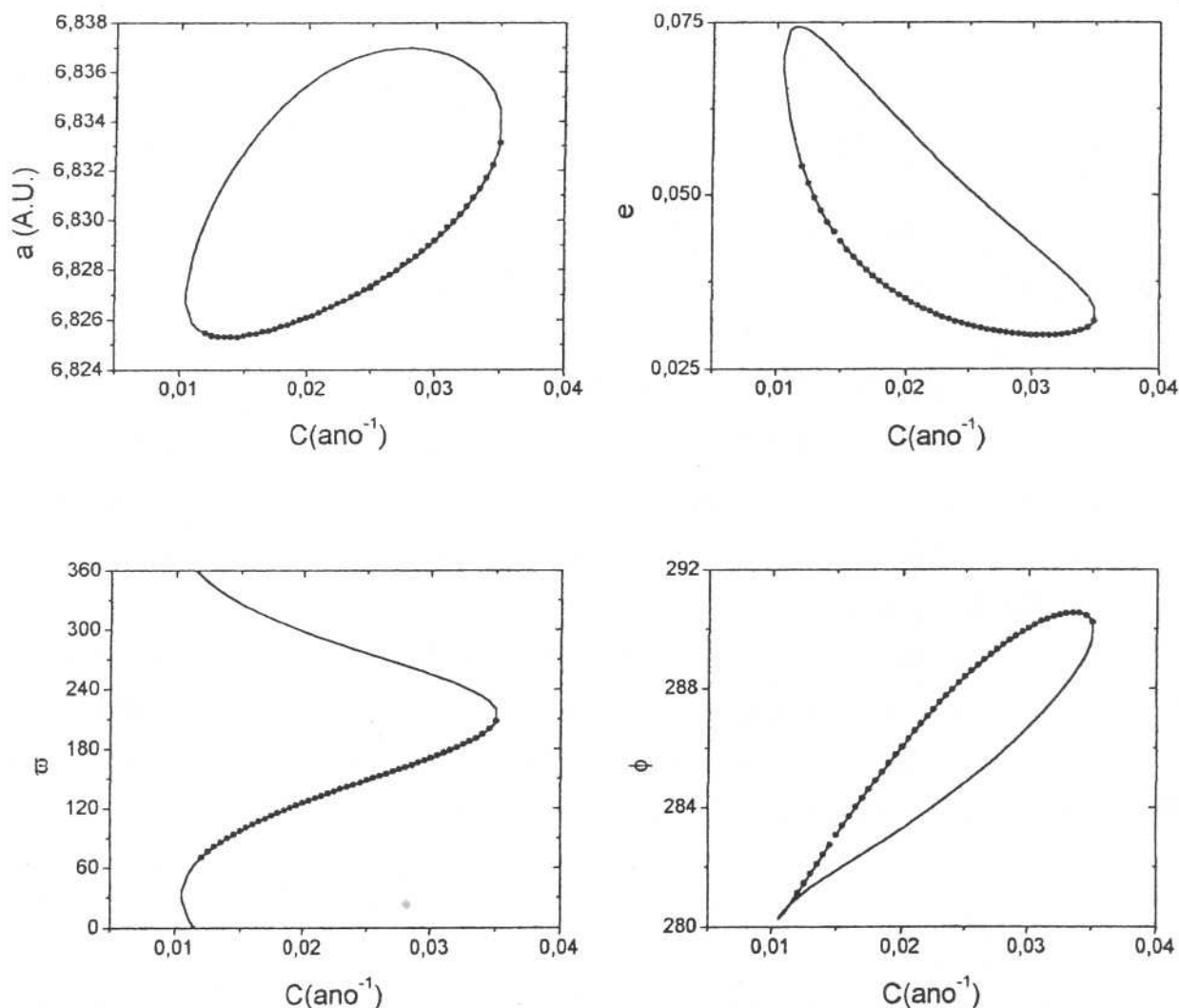


Figura 2.9. Mesmo que Fig. 2.2, para o caso do método numérico.

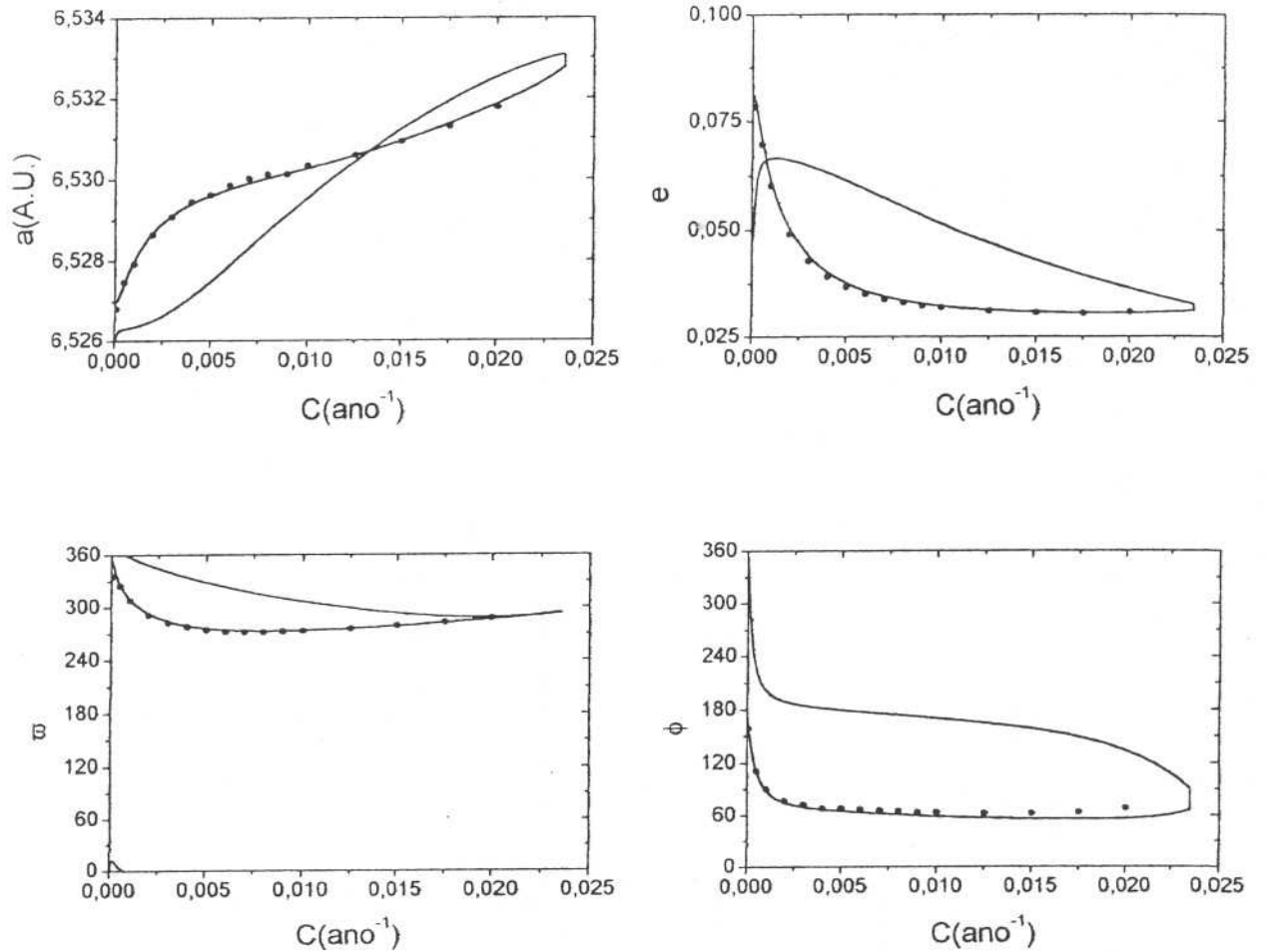


Figura 2.10. Mesmo que Fig. 2.6, para o caso do método numérico.

A seguir, determinamos as soluções para a ressonância 7:9 considerando três massas para o planeta: $m = \frac{1}{3150,0}$ ($\sim 33\%M_J$), $m = \frac{1}{3500,0}$ ($\sim 30\%M_J$) e $m = \frac{1}{4500,0}$ ($\sim 23\%M_J$) e com a órbita fixa com elementos orbitais: $a=5,2\text{UA}$, $e=0,05$ e $\varpi = 0,0$.

Observe pela Figura 2.11 que para o valor de massa $m = \frac{1}{3150,0}$ a ressonância 7:9 é extensa. Desta maneira podemos dizer que, para algum valor de massa algumas ressonâncias podem vir a ser extensas. No estudo feito não foram encontradas soluções extensas para o caso de ressonâncias exteriores de 1ª ordem mesmo variando os valores da massa do planeta de $\sim \frac{1}{1000}M_J$ até $\sim 10M_J$.

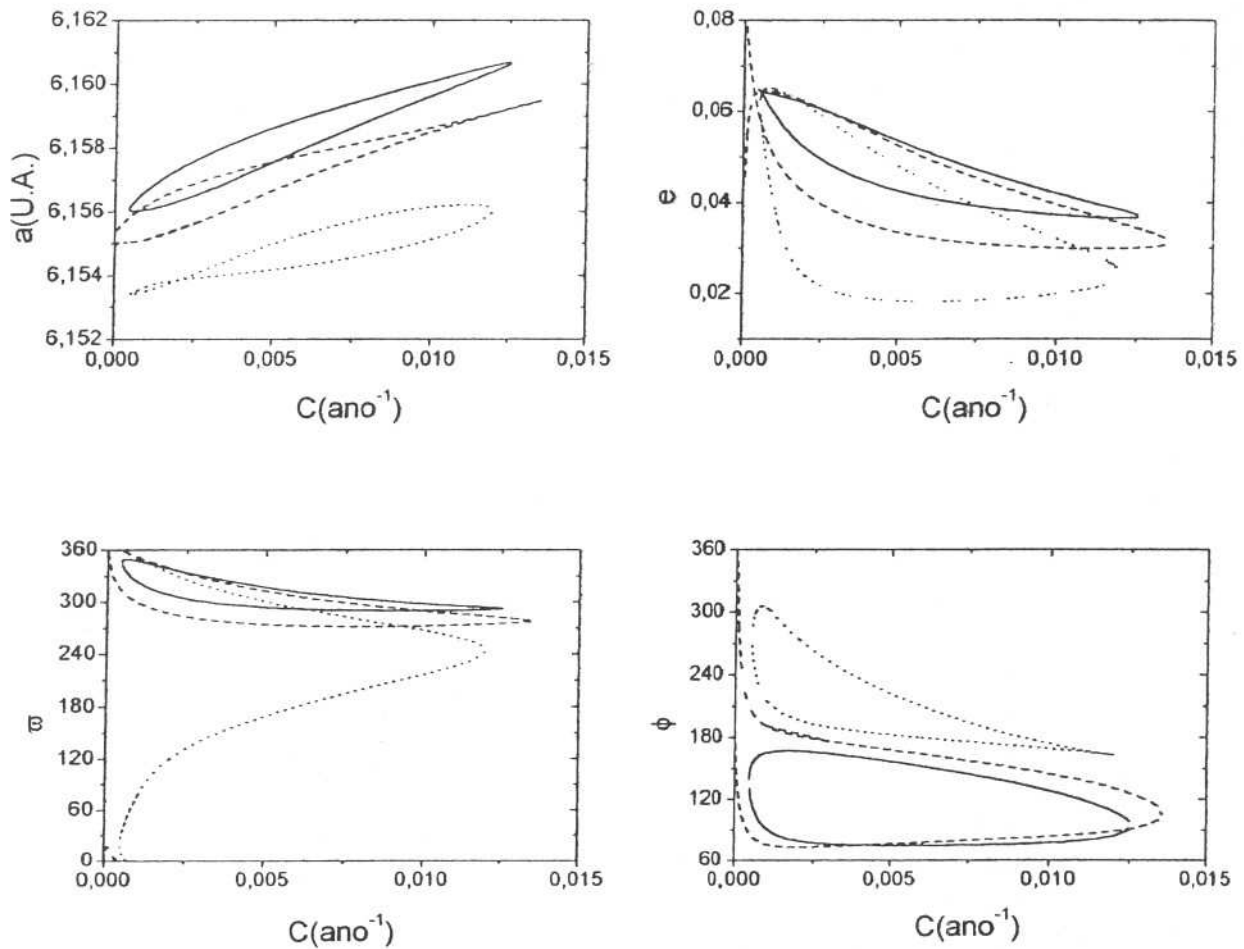


Fig. 2.11. Pontos corrotacionais para a ressonância 7:9 determinados com o método numérico. Neste caso as massas do planeta são: 1/400 (linha contínua), 1/3500 (traço maior) e 1/4500 (traço menor). Outros parâmetros como na Fig. 2.1.

Para as ressonâncias interiores foram determinadas as soluções com o método numérico considerando ambos os arrastos *Stokes* e V^2 . A Figura 2.12 mostra os pontos para a ressonância 3:2 enquanto que as Figuras 2.13, 2.14 e 2.15 mostram, respectivamente, os pontos de equilíbrio para as ressonâncias 2:1, 5:2 e 5:3. Em cada gráfico estão os pontos para ambos os modelos de força dissipativa. Para todos estes casos foi considerado o perturbador com massa: $m = \frac{1}{1047,355}$ e órbita fixa com elementos orbitais: $a=5,2UA$, $e=0,4$ e $\varpi = 0,0$. Ao longo deste estudo, nós observamos que todas as capturas em corrotação interiores foram extensas para j baixo, ou seja, para órbitas afastadas do planeta. Deste modo, poderíamos conjecturar que as capturas

interiores seriam mais efetivas que as exteriores para a acreção e formação de proto-planetas, entretanto, integrações numéricas de órbitas interiores têm mostrado que estas capturas não são fáceis de serem obtidas ocorrendo quase sempre encontro próximo entre o planetésimo e o planeta, causando assim instabilidade na órbita do planetésimo e posterior ejeção além da órbita do planeta ou em direção ao Sol. Uma aplicação para este resultado poderia ser um estudo sobre a influência de ressonâncias interiores de um proto-planeta formado em um disco de planetésimos interior ao proto-planeta ou um "cinturão de asteróides".

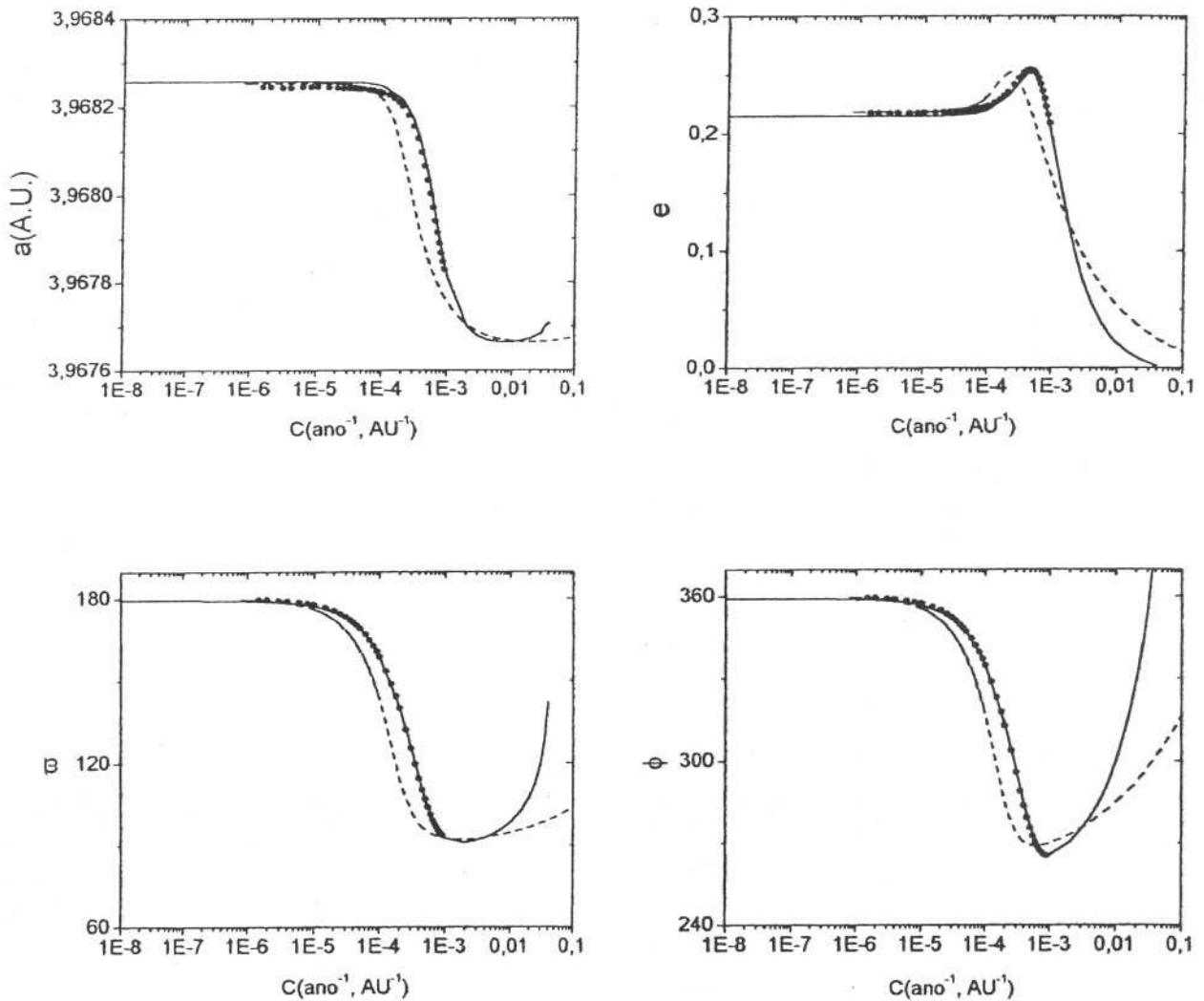
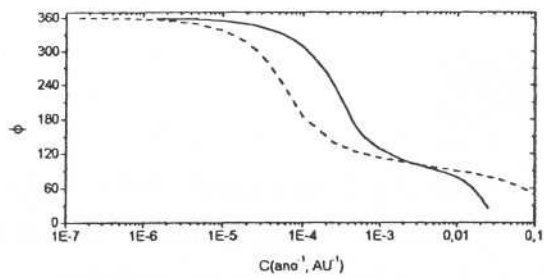
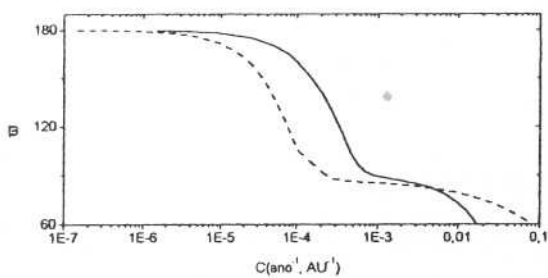
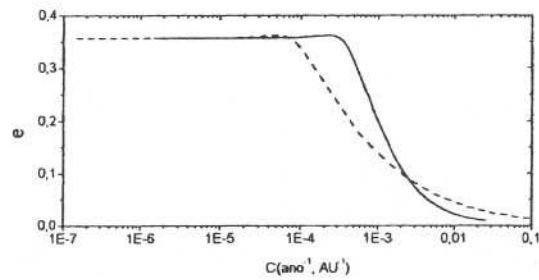
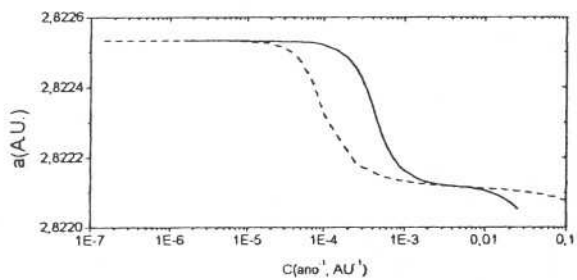
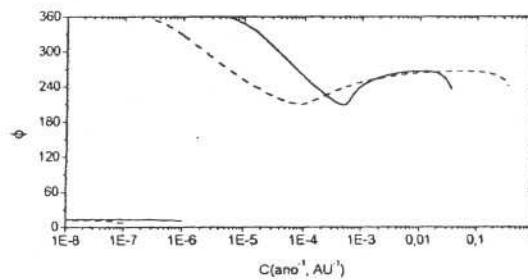
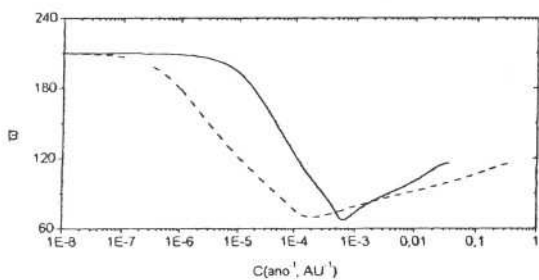
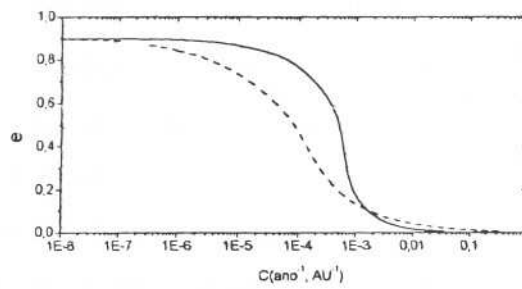
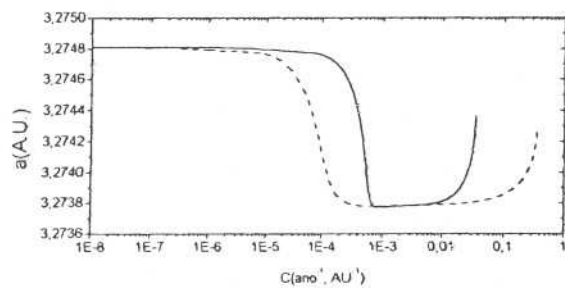
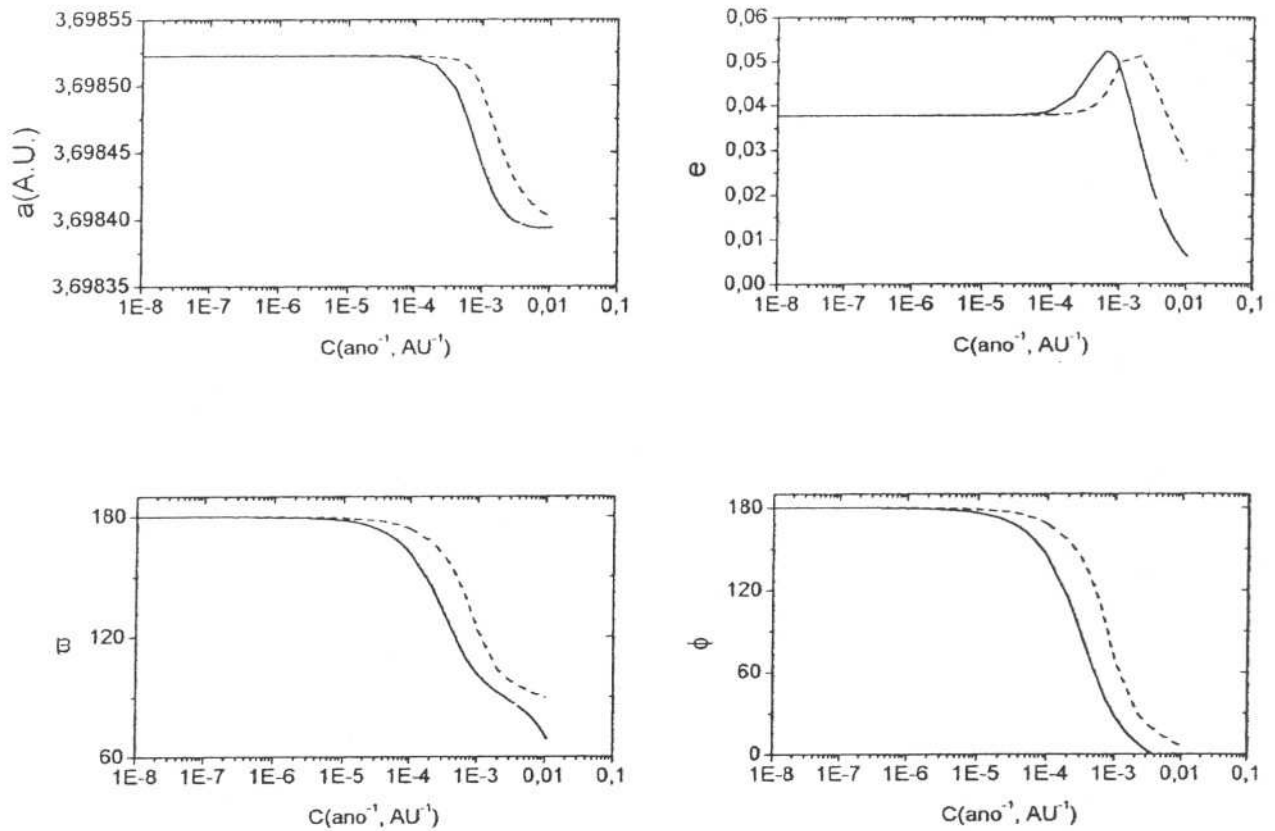


Figura 2.12. Pontos corrotacionais para a ressonância 3:2 determinados com o método numérico. Linha contínua e círculos escuros representam os pontos determinados para o arrasto *Stokes* e com traço os pontos determinados para ao arrasto V^2 .





Figuras 2.13, 2.14 e 2.15. Fig. 2.13. Pontos corrotacionais para as ressonâncias 2:1, 5:2 e 5:3, respectivamente, determinados com o método numérico. Parâmetros como na Fig. 2.8.

Estudamos também os efeitos da variação de massa e excentricidade do planeta na localização dos pontos de equilíbrio para as ressonâncias interiores. Na Figura 2.16 consideramos a massa do planeta como: $\frac{1}{10}M_J$, $\frac{1}{2}M_J$, $2M_J$ e $4M_J$ e órbita fixa com elementos orbitais: $a = 5,2UA$, $e = 0,4$ e $\varpi = 0,0$. Na Figura 2.17 consideramos o planeta com a massa de Júpiter e mesma órbita exceto pela excentricidade que foi considerada com valores: 0,2; 0,3; 0,4; 0,5 e 0,6. Ambas para a ressonância 3:2. Podemos observar que a variação na massa do planeta influencia pouco no valor da excentricidade para pequenos tamanhos de planetésimos ($C < 10^{-4} \text{ anos}^{-1}$) (ver Figura 16). Contudo, uma variação na excentricidade do planeta causa uma grande mudança na excentricidade do planetésimo, também para pequenos tamanhos ($C < 10^{-4} \text{ anos}^{-1}$) (ver

Figura 17). Além deste fato, a Figura 2.16 sugere que para excentricidades planetárias pequenas ($e_p < 0,05$) implicam num intervalo ΔC para capturas estáveis muito pequeno, fato este que pode explicar a dificuldade em se achar as soluções de corotação para as ressonâncias 2:1, 3:2 e 4:3 nos trabalhos anteriormente citados.

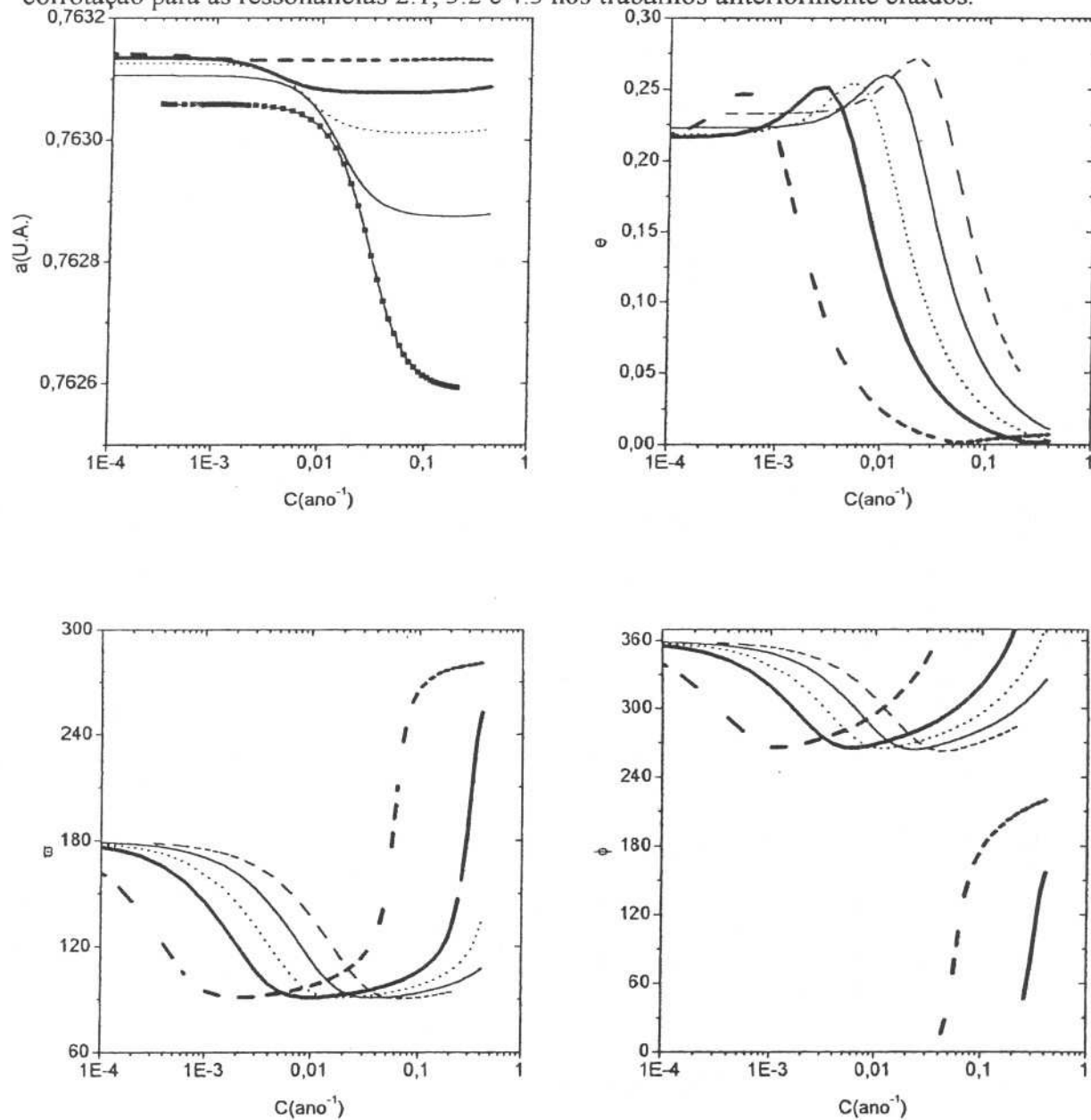


Figura 2.16. Variação dos pontos corrotacionais em função da massa do planeta para a ressonância 2:3.

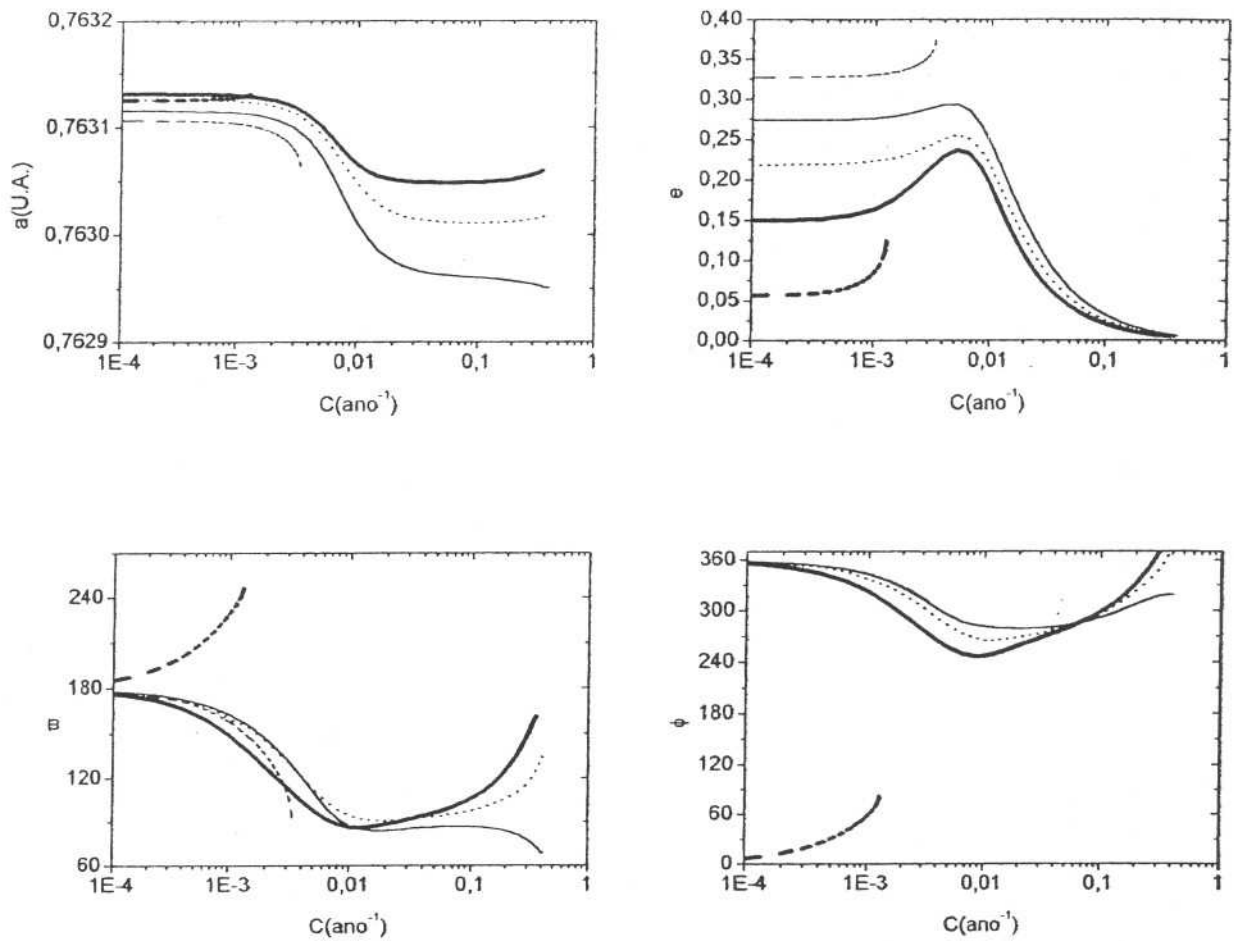
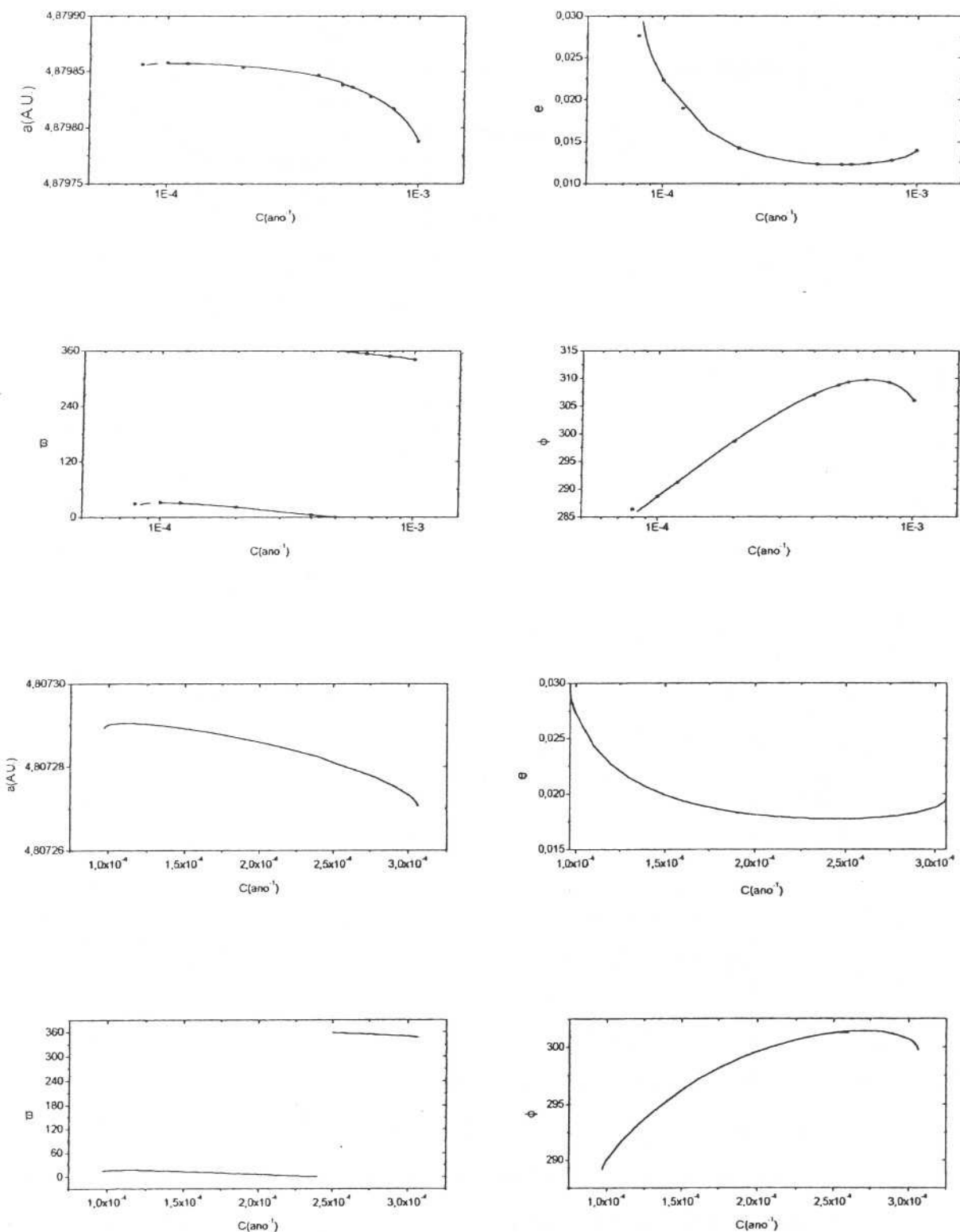


Figura 2.17. Variação dos pontos corrotacionais em função da excentricidade do planeta para a ressonância 2:3.

Por fim, nós determinamos os pontos para duas ressonâncias interiores próximas ao planeta; 11:10 (Fig.18) e 9:8 (Fig. 19). Nestes dois exemplos foi considerado um planeta com massa:

planeta com massa: $\frac{1}{1000} m_J$ e órbita com elementos: $a = 5,2UA$, $e = 0,05$ e $\varpi = 0,0$.

Observe que para estes dois casos, as ressonâncias interiores não são mais extensas, ou seja para valores altos de j as ressonâncias interiores perdem seu caráter de extensa. Estas capturas, para valores pequenos de massa e excentricidade moderada tem sido encontradas em trabalho anteriores (Kary e Lissauer 1995). No entanto, para planetas com massas maiores (tipo Júpiter), estas capturas não são encontradas, por ser grande a instabilidade perto dos planetas gigantes. Todavia para ressonâncias mais afastadas de planeta gigante (baixos valores de j), capturas são possíveis mas somente para excentricidades planetárias altas, como visto na Figura 2.16.



Figuras 2.18 e 2.19. Pontos corrotacionais para a ressonância 11:10 e 9:8, respectivamente, determinados com o método numérico. A massa do planeta vale 1/1000 da massa de Júpiter e a órbita é a mesma de Fig. 2.1.

2.3. Discussão dos Resultados

Vimos que o método de 1ª ordem determina de maneira precisa os pontos de equilíbrio corrotacionais para as ressonâncias externas e internas mas não para as extensas. O método genérico determina ambas com precisão. Mostramos que os resultados obtidos com o método numérico são precisos como se esperava da construção do método (não existe aproximações) e observamos que este também é mais rápido na determinação de um ponto de equilíbrio que o de 1ª ordem. Uma aplicação destes métodos é ver a ‘extensão’ das ressonâncias extensas que poderiam ser úteis para acreção de planetésimos capturados numa mesma ressonância e sua consequência em formação planetária. No entanto só se encontrou capturas extensas para ressonâncias de ordem > 1 e valores de massa do planeta dentro de certos intervalos. Em particular, para as ressonâncias de 1ª ordem mais importantes (1:2, 2:3 e 3:4) não foram encontradas ressonâncias extensas dentro de um grande intervalo de possíveis massas planetárias. A conclusão é que a aplicabilidade das ressonâncias extensas na acreção de planetésimos parece ser pouco importante. Em relação às ressonâncias internas, estas são extensas apenas no caso de baixo j (ressonâncias principais) e altas excentricidades do planeta. Para altos j (ressonâncias perto do planeta) capturas só são encontradas para planetas de pequena massa. Em ambos os casos, capturas em ressonância se dão com baixa probabilidade, limitando, de qualquer forma, a ação de capturas em ressonâncias internas em formação planetária.

Capítulo 3. Um estudo sobre as velocidades relativas de colisão entre pares de planetésimos capturados em ressonância

Introdução

Formação planetária ocorre em vários estágios (colapso da nuvem molecular, formação dos núcleos dos planetas, formação de atmosfera, etc.) os quais são caracterizados por diferentes processos físicos (turbulência, colisões, arrasto do gás, etc.), alguns dos quais não muito bem explicados. Contudo, é amplamente aceito que os planetas e os corpos menores do sistema solar se formaram por colisões de acumulação³. Este processo se iniciou quando os grãos de poeira do disco começaram a se agregar e crescer a medida que colidiam uns com os outros, formando por fim pequenas partículas com tamanhos da ordem do centímetro. Num segundo estágio, colisões de acreção entre essas partículas formaram corpos com tamanhos da ordem de poucos metros a alguns quilômetros chamados de planetésimos. Ainda não é bem entendido que fatores levaram os planetésimos a crescerem até alcançarem tamanhos da ordem de 10km adquirindo assim massa suficiente para perturbarem gravitacionalmente uns aos outros. A partir destes tamanhos, o crescimento ocorre devido a colisões de acreção entre os planetésimos gerando corpos maiores chamados de embriões, os quais formarão (novamente por colisões de acreção) os planetas terrestres e os núcleos dos planetas gigantes. Desta maneira, a presença dos planetas, satélites, asteróides e cometas é uma prova de que o processo de colisão durante a formação do sistema solar resultou, em média, em ganho de massa, ou seja, corpos cada vez maiores foram sendo formados durante os estágios de formação planetária.

Experimentos feitos em laboratório mostram que colisões entre grãos microscópicos levam de fato a formação de agregados com tamanhos até da ordem do centímetro (Wurm e Blum 1998). Simulações mostram que a gravidade mútua assegura o crescimento por colisões entre corpos com tamanhos maiores que alguns quilômetros.

³ Com possível exceção de Júpiter e Saturno que poderiam ter-se formado por instabilidade gravitacional (Boss 1997).

Corpos com tamanhos da ordem de alguns metros a poucos quilômetros excede o tamanho aceitável para experimentos feitos em laboratório, além do fato de que a física de colisões entre corpos com estes tamanho ser bem complicada pois deve levar em conta algumas propriedades dos materiais como dureza, porosidade, etc. Para corpos com tamanhos neste intervalo, o arrasto aerodinâmico do gás é a força não gravitacional mais efetiva sobre os mesmos, causando um decaimento secular no semi-eixo maior de suas órbitas além de circularizá-las (Weidenschilling e Davis 1985). Nesta situação, para que haja favorecimento ao crescimento por colisões entre planetésimos, a velocidade relativa entre eles tem de ser pequena. Este fato só é garantido para planetésimos com tamanhos semelhantes pois a velocidade dos mesmos está diretamente relacionada com os seus tamanhos e este fato acarretaria numa velocidade relativa baixa. Um processo que pode ter contribuído para o ganho de massa por colisões é a captura em ressonância de planetésimos com um proto-planeta previamente formado (Weidenschilling e Davis 1985). No entanto, neste trabalho, os autores sugerem que colisões entre planetésimos capturados em órbitas ressonantes adjacentes e também com órbitas não ressonantes favoreceria a fragmentação ou destruição dos planetésimos pois estas se dariam a altas velocidades, pelo fato de que as excentricidades dos planetésimos nas ressonâncias serem relativamente altas. Os autores sugerem que este processo favoreceria por outro lado o crescimento do proto-planeta já formado pois, como arrasto do gás causa um decaimento orbital dos fragmentos das colisões, estes, por fim, seriam acrescidos a massa do proto-planeta. Entretanto deve ser enfatizado que as órbitas de planetésimos capturados em ressonância mantêm vínculos comuns, portanto o fato das excentricidades serem moderadamente altas por si só não garante velocidades de colisão altas.

O único trabalho que visa estudar os efeitos de colisões entre planetésimos em ressonância foi feito por Malhotra (1993). Neste trabalho, a autora estuda a estabilidade de colisões entre dois planetésimos em ressonância, modelando uma colisão por um acréscimo de velocidade dado a um planetésimo, como se adquirida pela colisão com outro planetésimo. A conclusão deste trabalho é que planetésimos que sofrem colisões na direção radial à direção do vetor velocidade tendem a permanecer na ressonância, enquanto que colisões na direção tangencial à direção do vetor velocidade tendem a retirar o planetésimo da ressonância. Contudo este trabalho não faz referência sequer a

uma possível fragmentação do planetésimo durante a colisão, tratando as mesmas somente como colisões elásticas.

Vê-se assim que falta um estudo sobre a física das colisões entre pares de planetésimos capturados em ressonância. Nossas simulações, neste capítulo, visam assim estudar, os efeitos de um Júpiter pré-formado, nas colisões entre pares de planetésimos em órbitas exteriores a este planeta. Neste estudo sobre a física de colisões para planetésimos (com raios variando de 10m até 10km), estaremos interessados em determinar as condições para que uma colisão entre dois planetésimos capturados, em uma mesma ressonância, tenha como resultado um ganho de massa de um dos dois planetésimos.

3.1. Método utilizado para o cálculo das velocidades relativas de colisão entre pares de planetésimos capturados em ressonância

O método para o cálculo das velocidades relativas de colisão entre pares de planetésimos capturados em ressonância consiste, inicialmente, em integrar numericamente as equações de movimento para um planetésimo usando um sistema de coordenadas heliocêntrico. Foi assumido o problema como plano e restrito de três corpos. Em coordenadas heliocêntricas a equação de movimento para a posição do planetésimo é dada por

$$\ddot{\vec{r}} = -G(M_S + m)\frac{\vec{r}}{r^3} - Gm_P\left(\frac{\vec{r} - \vec{r}_P}{|\vec{r} - \vec{r}_P|^3} + \frac{\vec{r}_P}{r_P^3}\right) + \vec{a}_{f.d.} \quad (33)$$

onde, G é a constante gravitacional, M_S é a massa do Sol, m_P é a massa do planeta, m é a massa do planetésimo, e \vec{r} e \vec{r}_P são os vetores posição do planetésimo e do planeta, respectivamente, em relação ao Sol. $\vec{a}_{f.d.}$ é a aceleração devido a força dissipativa.

Para o força dissipativa foi seguido o modelo usado por Weidenschilling (1977). Neste modelo, a expressão empírica para a aceleração devido ao arrasto do gás sobre corpos esféricos é dada por,

$$a_{f.d.} = F_{f.d.} / m = \frac{-3C_D\rho V^2}{8R\rho_p} \quad (34)$$

onde, C_D é chamado de coeficiente de arrasto adimensional, sendo dado por,

$$C_D = \begin{cases} 24R_e^{-1} & , R_e < 1 \\ 24R_e^{-0.6} & , 1 < R_e < 800 \\ 0,44 & , R_e > 800 \end{cases} \quad (35)$$

Substituindo esta expressão na anterior e tendo em vista que o número de Reynolds é

dado por $R_e = \frac{2\rho_g VS}{\eta}$ (visto no capítulo 2), obtém-se,

$$a_{f.d.} = F_{f.d.} / m = \begin{cases} \frac{9\eta V}{2R^2 \rho_p} & , R_e < 1 \\ \frac{5.94\eta^{0.6} \rho^{0.4} V^{1.4}}{R^{1.6} \rho_p} & , 1 < R_e < 800 \\ 0.165 \frac{\rho V^2}{R\rho_p} & , R_e > 800 \end{cases} \quad (36)$$

Desta maneira têm-se três modelos para o arrasto do gás, sendo que o número de Reynolds define o intervalo de atuação de cada um deles.

Usando-se a expressão do número de Reynolds, construímos a figura 3.1 que mostra os limites de atuação destes três modelos de força dissipativa, considerando a região da ressonância 2:3 (6,813AU) e um gás de viscosidade (η) igual a $10^{-4} g/cm \cdot s$. Analisando-se este gráfico, conclui-se que o arrasto Stokes (Eq.3.4.1) representa melhor o modelo de arrasto do gás sofrido por planetésimos com tamanhos de até ~100m considerado o gás com densidade $\sim 10^{-13} g/cm^3$. Uma força proporcional a V^2 modela melhor o arrasto do gás sofrido por planetésimos com raios maiores que 10m na região onde a densidade do gás é $\sim 10^{-9} g/cm^3$ e um arrasto intermediário, proporcional a $V^{1.4}$ modela melhor o arrasto sofrido por planetésimos com tamanhos variado de 10m até 5km, se for considerado para o gás uma densidade igual a $10^{-12} g/cm^3$. Para tamanhos de planetésimos maiores que 10km de raio, a gravidade mútua deve ser levada em conta nas interações entre os pares de planetésimos, sendo assim, este limite está fora da realidade das nossas simulações.

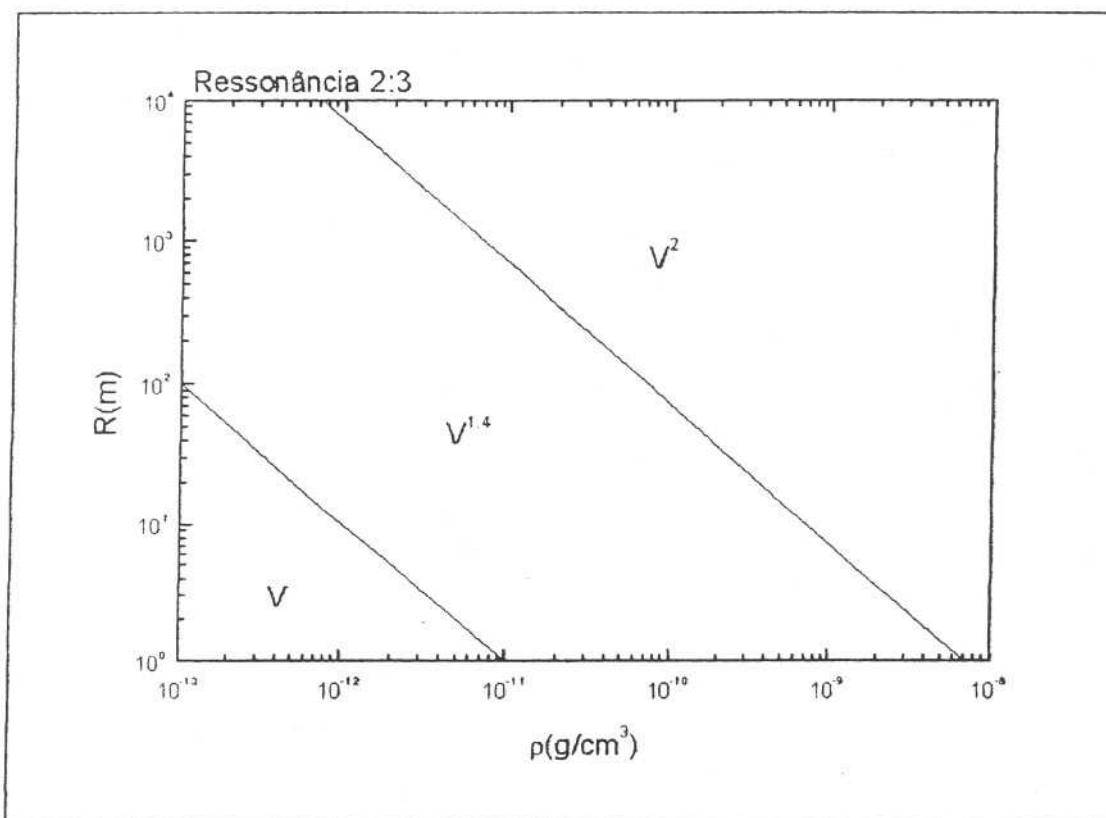


Figura 3.1. Gráfico mostrando os limites de atuação dos arrastos dados pela Eq. (3.4) em função dos tamanhos dos planetesimos e da densidade do gás na região da ressonância 2:3.

As equações de movimento foram integradas usando o integrador *RADAU* de ordem 16 (Everhart 1985) por um período de 5×10^5 anos e tomando como intervalo de integração o período orbital do planeta ou seu período sinódico e as condições iniciais do planetesimo são; semi-eixo maior igual a 6,8UA, excentricidade igual a 0,05 e longitudes igual a zero. Apesar da integração numérica se dar por um período total de 5×10^5 anos, são somente consideradas as coordenadas retangulares (x, \dot{x}, y, \dot{y}) das órbitas para os últimos 1×10^5 anos do tempo total de integração, pois a partir de um determinado tempo, a partícula já cessou o decaimento orbital e se encontra numa órbita estável. Nas simulações, consideramos Júpiter como planeta perturbador tendo órbita circular e massa igual a $\frac{m_J}{M_S} = 1047,355$.

A figura 3.2 mostra as coordenadas heliocêntricas, num referencial girante com o planeta, das órbitas de dois planetesimos capturados na ressonância 2:3. Observou-se que a órbita, para qualquer tamanho de planetesimo, neste referencial se aproxima de

uma figura unidimensional. Esta característica da órbita facilita muito a determinação das velocidades relativas de colisão entre os planetésimos, pois pela observação da figura, conclui-se que só poderá haver colisão entre os dois planetésimos em um dos quatro pontos de interseção das órbitas. Esta característica se repete para as outras ressonâncias vistas 1:2 e 3:4. Desta maneira, nosso trabalho será elaborar um modelo que calcule as velocidades relativas de colisão entre os planetésimos nos pontos de interseção dessas órbitas e verificar se estas colisões resultarão em fragmentação ou não dos planetésimos.

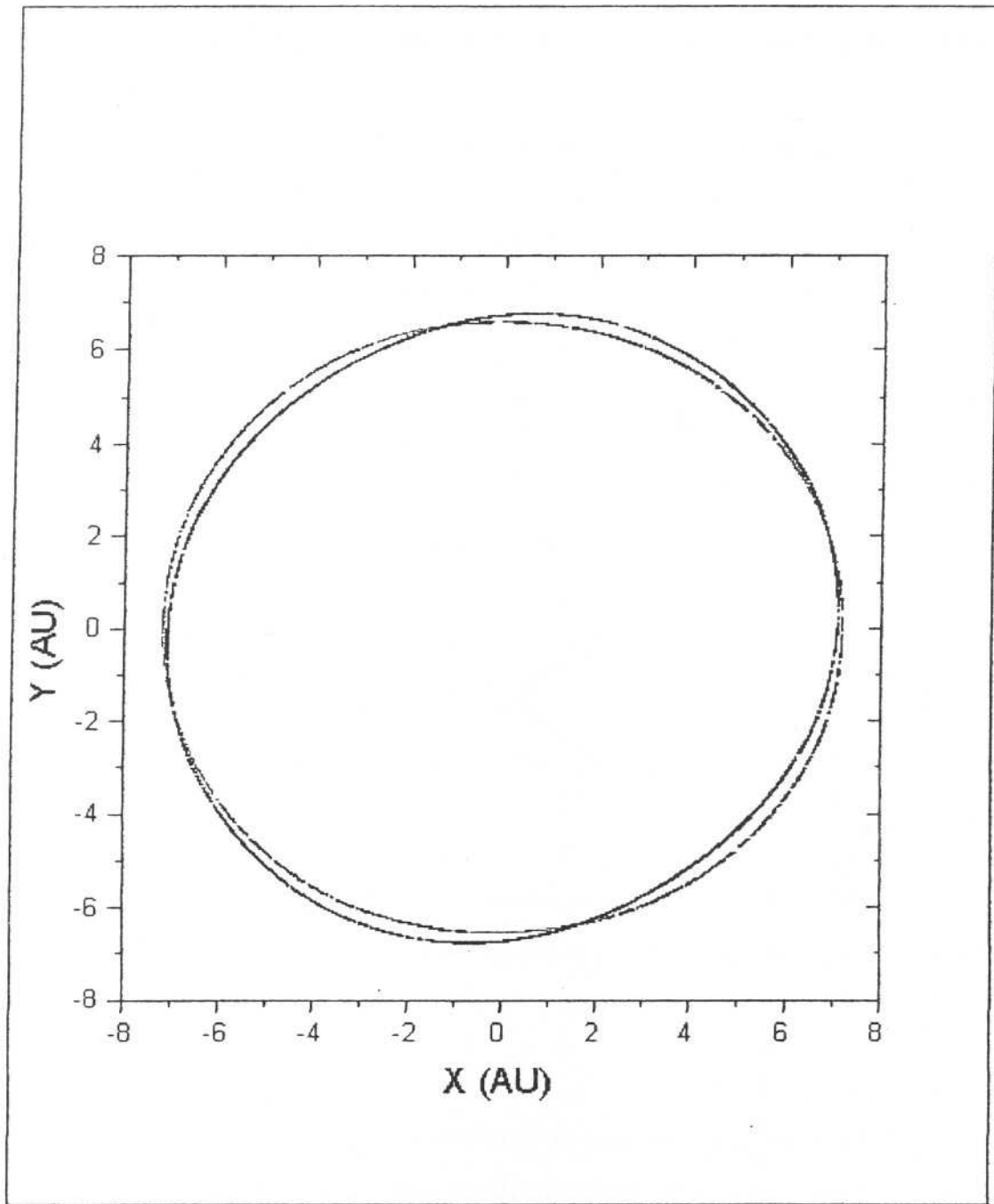


Figura 3.2. Coordenadas heliocêntricas correspondentes as órbitas de dois planetésimos com razão de tamanhos igual a 10, capturados na ressonância 2:3, num referencial girante com Júpiter.

3.2.1. Algoritmo para o cálculo das velocidades relativas de colisão

O algoritmo para calcular as velocidades relativas de colisão entre os planetesimos consiste em determinar onde ocorreu a interseção das órbitas. Para isto, inicialmente, o algoritmo toma dois pontos de cada órbita e determina uma equação de reta para ambas as órbitas. A figura 3.3 define as coordenadas dos pontos.

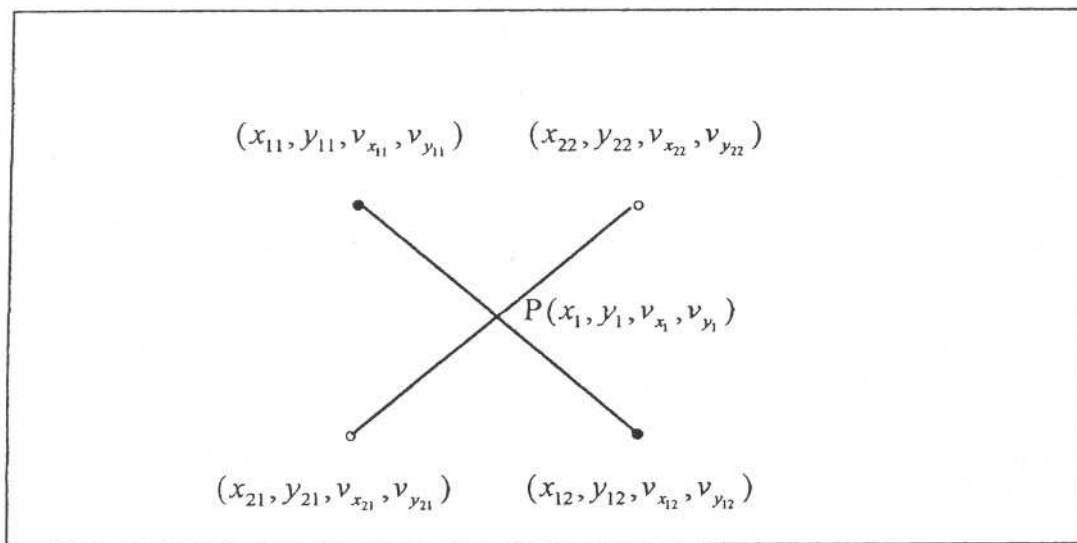


Figura 3.3a. Definição das coordenadas dos pontos usados para o cálculo das velocidades relativas de colisão.

A seguir são determinadas as coordenadas (x_1, y_1) do ponto de interseção P, as quais são dadas pela solução do sistema de equações (equações das retas r_1 e r_2).

$$r_1: y = \frac{y_{21} - y_{22}}{x_{21} - x_{22}}x + y_{21} - \frac{y_{21} - y_{22}}{x_{21} - x_{22}}x_{21} \quad (37)$$

$$r_2: y = \frac{y_{11} - y_{12}}{x_{11} - x_{12}}x + y_{11} - \frac{y_{11} - y_{12}}{x_{11} - x_{12}}x_{11} \quad (38)$$

Com essas coordenadas, são calculados dois parâmetros auxiliares dados por

$$p_1 = (x_1 - x_{11}) \cdot (x_{11} - x_{12}) \quad (39)$$

$$p_2 = (x_1 - x_{21}) \cdot (x_{21} - x_{22}) \quad (40)$$

Somente os pontos que satisfaçam a condição: $p_1 < 0$ e $p_2 < 0$ terá a interseção das retas definidas pelos mesmos entre os pontos extremos. A figura 3.3b mostra o caso em que a interseção está fora dos pontos que definem as retas r_1 e r_2 .

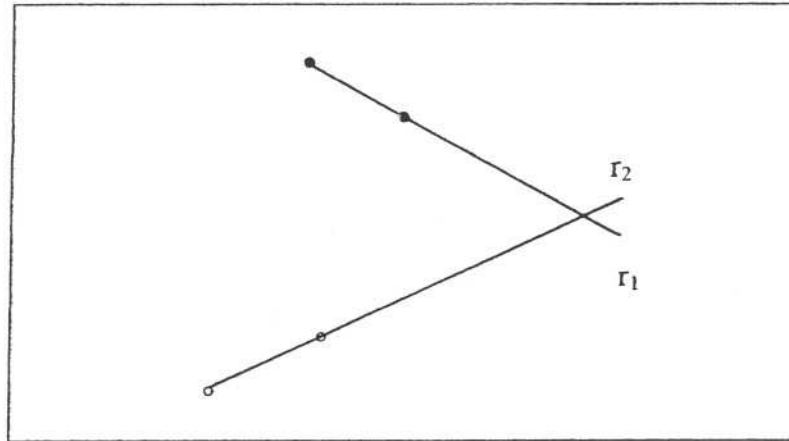


Figura 3.3b. Coordenadas de dois pares de pontos mostrando que a interseção das retas r_1 e r_2 é exterior aos pontos. Neste caso, a condição: $p_1 < 0$ e $p_2 < 0$ não é satisfeita.

Uma vez que os pares de pontos satisfaçam a condição $p_1 < 0$ e $p_2 < 0$, é feita uma aproximação linear para o cálculo das componentes das velocidades (v_{x_1}, v_{y_1}) e (v_{x_2}, v_{y_2}) no ponto P.

Essas componentes serão dadas por

$$v_{x_1} = v_{x_{11}} + \frac{x_1 - x_{11}}{x_{12} - x_{11}}(v_{x_{12}} - v_{x_{11}}) \quad (41)$$

$$v_{x_2} = v_{x_{21}} + \frac{x_1 - x_{21}}{x_{22} - x_{21}}(v_{x_{22}} - v_{x_{21}}) \quad (42)$$

$$v_{y_1} = v_{y_{11}} + \frac{y_1 - y_{11}}{y_{12} - y_{11}}(v_{y_{12}} - v_{y_{11}}) \quad (43)$$

$$v_{y_2} = v_{y_{21}} + \frac{y_1 - y_{21}}{y_{22} - y_{21}}(v_{y_{22}} - v_{y_{21}}) \quad (44)$$

Assim, obtém-se a velocidade relativa de colisão pela expressão

$$V_{rel} = \sqrt{\Delta V_x^2 + \Delta V_y^2} \quad (45)$$

onde,

$$\Delta V_x = v_{x_1} - v_{x_2} \text{ e } \Delta V_y = v_{y_1} - v_{y_2} \quad (46)$$

Com auxílio deste algoritmo foram calculadas as velocidades relativas de colisão entre pares de planetésimos capturados nas ressonâncias 1:2 (8,25AU), 2:3 (6,81AU) e 3:4 (6,30AU) em função dos coeficientes de arrasto ou tamanhos dos planetésimos.

Para a ressonância 2:3 foi considerado um gás com viscosidade igual a $10^{-4} \text{ g/cm} \cdot \text{s}$ (figura 3.1) e foram considerados os arrastos Stokes, para uma densidade do gás com valor igual a 10^{-14} g/cm^3 , $V^{1,4}$ para uma densidade igual a 10^{-12} g/cm^3 e V^2 para uma densidade igual a 10^{-9} g/cm^3 .

Nas figuras 3.4 e 3.4 são mostrados os gráficos da velocidade relativa de colisão (mínima e máxima, respectivamente) em função do coeficiente de arrasto e do raio do planetésimo para o modelo $V^{1,4}$, respectivamente. Para estes gráficos, a interseção das retas (curvas) com o eixo das ordenadas dá o valor do coeficiente de arrasto (raio) do planetésimo projétil. As retas mostradas nestas figuras são ajustes lineares aos pontos obtidos e as curvas mostradas nas figuras 3.5 e 3.7 foram obtidas usando a expressão

$$K = \frac{5,94\eta^{0,6} \rho^{0,4}}{R^{1,6} \rho_p} \quad (47)$$

obtida por meio da segunda das Eqs. (36).

Observamos que a distribuição dos pontos para o caso da 2:3 e 3:4 se aproximam muito de uma distribuição linear enquanto que a 1:2 se aproxima de uma distribuição quadrática. Talvez possa haver uma razão teórica para que isso aconteça dessa maneira.

Pela figura 3.4, uma colisão entre um projétil “de $K=0,01$ ” com um alvo “de $K=0,004$ ” se daria a uma velocidade aproximadamente igual a 106m/s e pela figura 3.5, uma colisão entre um projétil com raio igual a 45,0m com um alvo de raio igual a 450,0m se daria a uma velocidade aproximadamente igual a 17,0m/s.

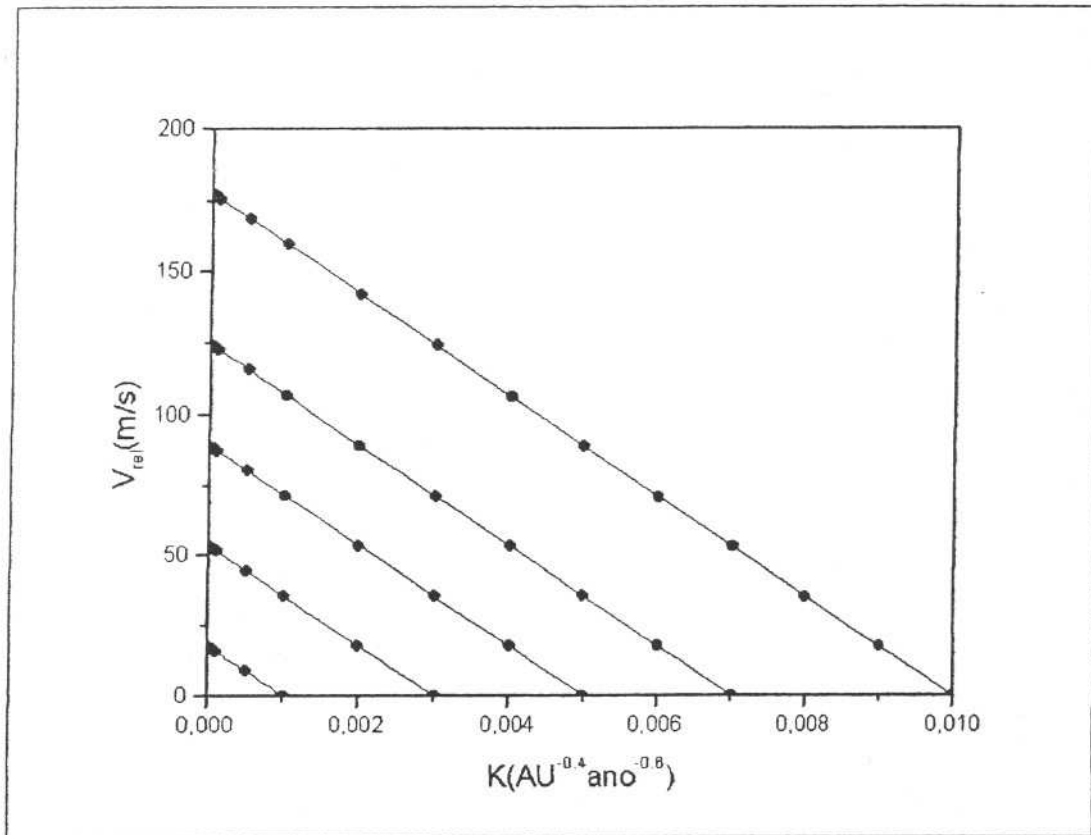


Figura 3.4. Gráfico das velocidades relativas mínimas de colisão em função dos coeficientes de arrasto dos planetesimos alvo para projéteis com $K (\text{AU}^{-0,4} \text{ano}^{-0,6})$ iguais a 0,01; 0,007; 0,005; 0,003 e 0,001.

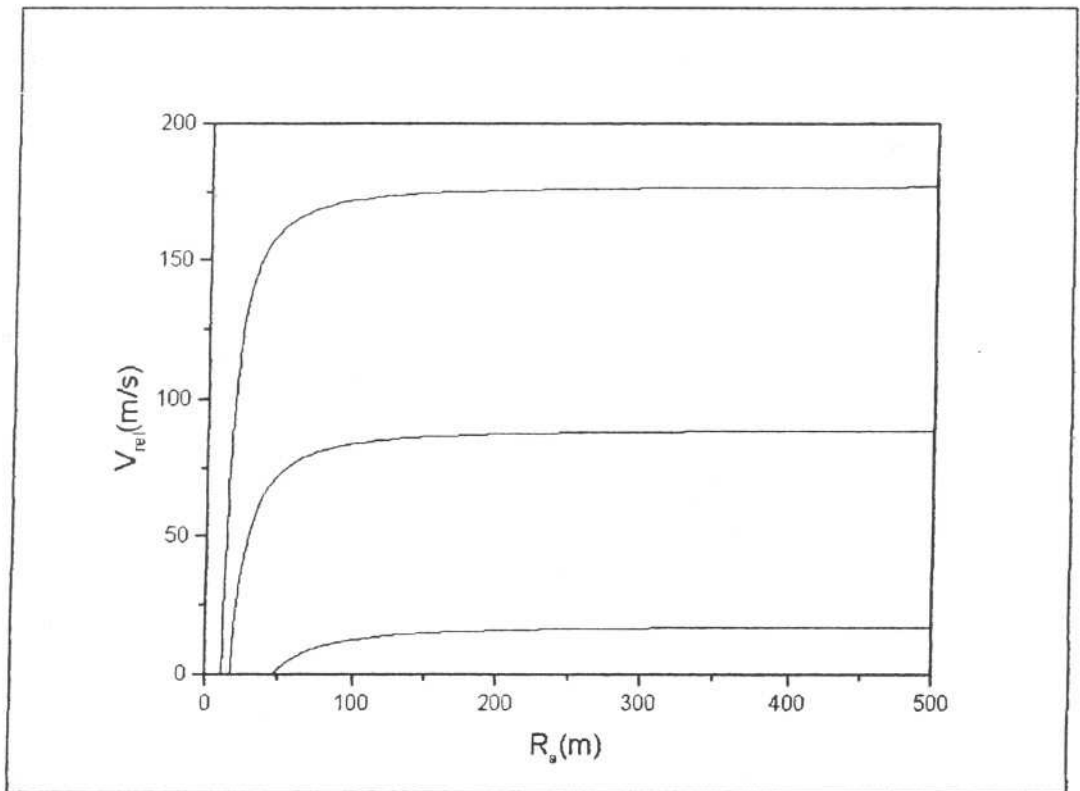


Figura 3.5. Relação velocidade de colisão em função do raio do planetésimo alvo para três planetesimos projéteis com raios aproximadamente iguais a 10,8m, 16,7m e 45,7m.

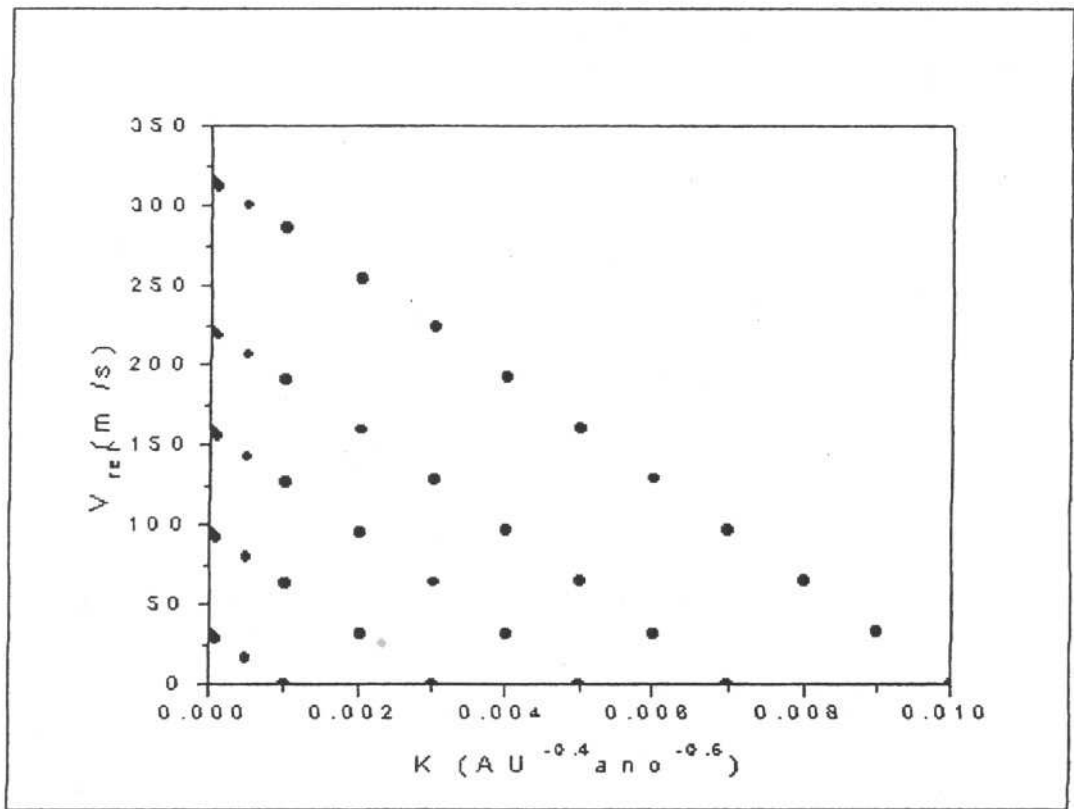


Figura 3.6. Mesmo da figura 3.4 exceto pelo fato das velocidades serem as mais altas.

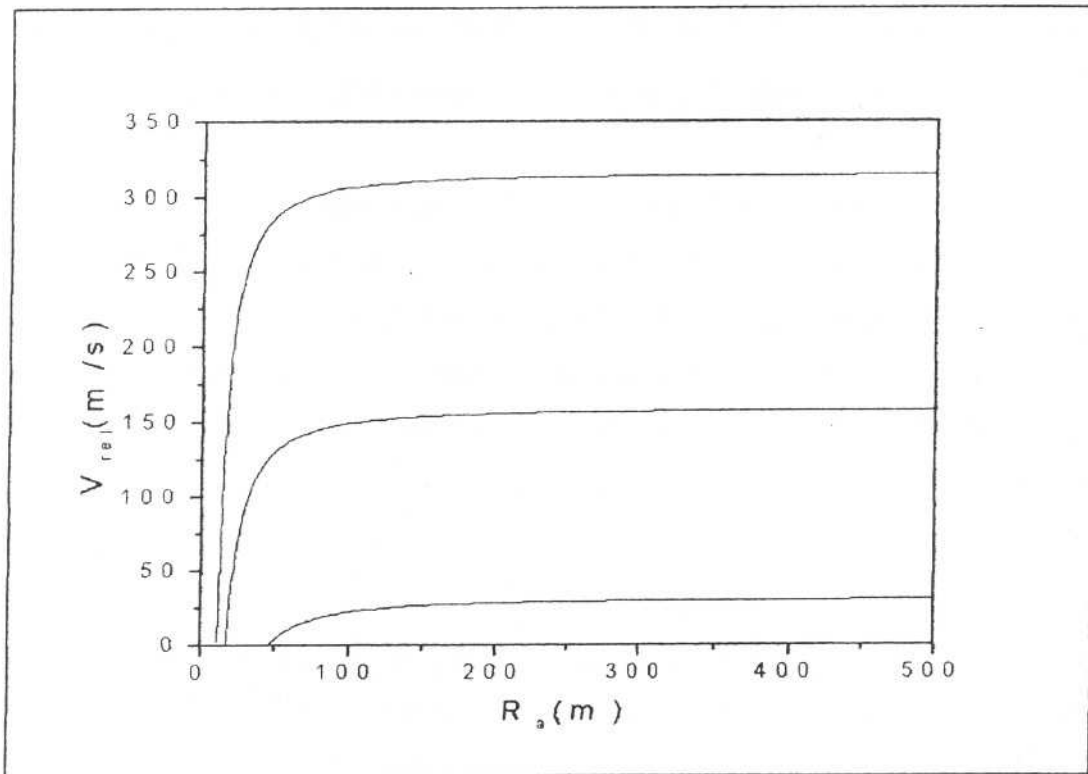


Figura 3.7. Mesmo da figura 3.5 exceto pelo fato das velocidades relativas serem as mais altas.

Estes gráficos mostram que a velocidade relativa de colisão (entre pares de planetesimos) pode ser tão baixa quanto 10m/s, o que poderia resultar em um ganho de massa do planetesimo alvo na colisão, para o caso da colisões ocorrem nos pontos onde as velocidades relativas são as menores possíveis.

3.2.2. Cálculo das velocidades relativas de colisão para pares de planetésimos capturados nas ressonâncias 1:2, 2:3 e 3:4

Continuamos as simulações agora tomando valores para a viscosidade do gás (além da densidade) variando com a distância heliocêntrica. Essa consideração deve ser feita visto que nos modelos de nebulosa, a densidade, a temperatura e a viscosidade, no plano médio da nebulosa, são geralmente expressas por leis de potência.

Foram consideradas as ressonâncias 1:2, 2:3 e 3:4 com valores para a viscosidade do gás iguais a $4,44 \times 10^{-5} \text{ g/cm}\cdot\text{s}$, $4,89 \times 10^{-5} \text{ g/cm}\cdot\text{s}$ e $5,09 \times 10^{-5} \text{ g/cm}\cdot\text{s}$, respectivamente. Esses valores foram escolhidos a partir de um modelo de nebulosa que será descrito na seção 3.5.

Nas figuras 3.8, 3.9 e 3.10 são mostrados os limites de aplicação dos arrastos dados pelas Eqs. (36) nas regiões das ressonâncias 1:2, 2:3 e 3:4.

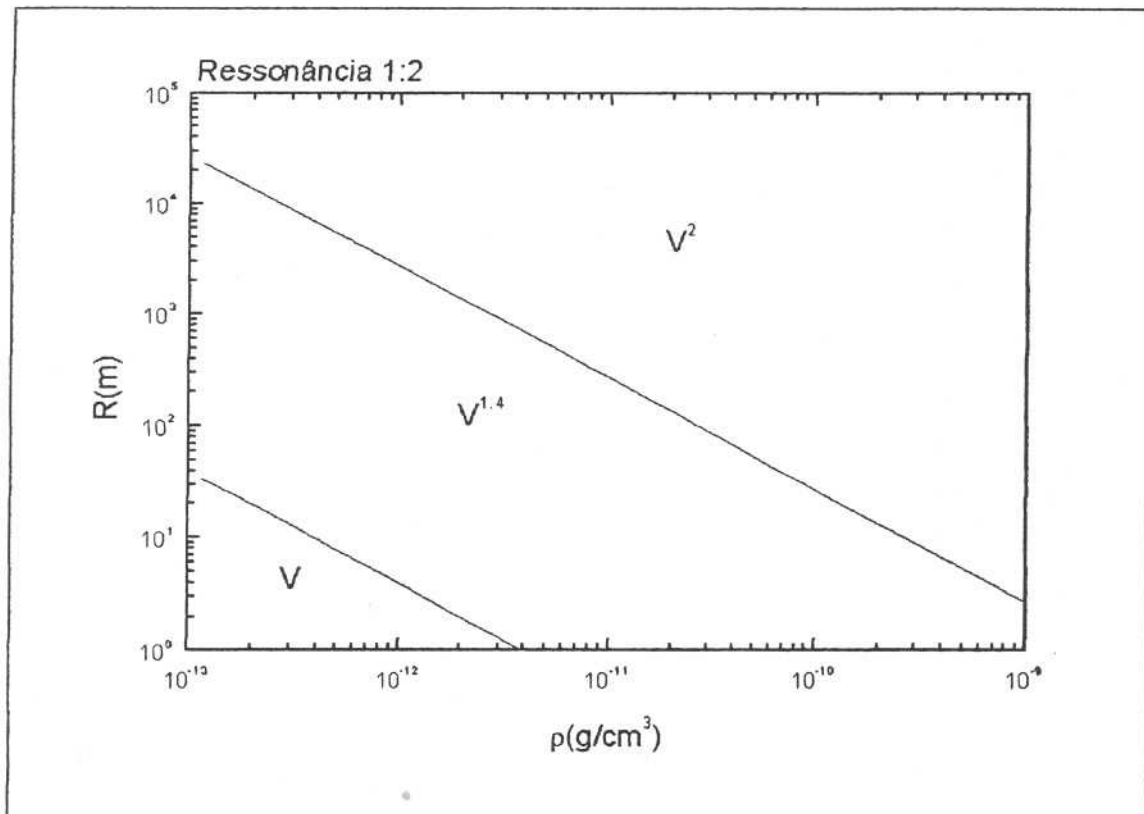


Figura 3.8. Gráfico mostrando os limites de atuação dos arrastos dados pela 1ª Eq. (36) em função dos tamanhos dos planetésimos e da densidade do gás na região da ressonância 1:2.

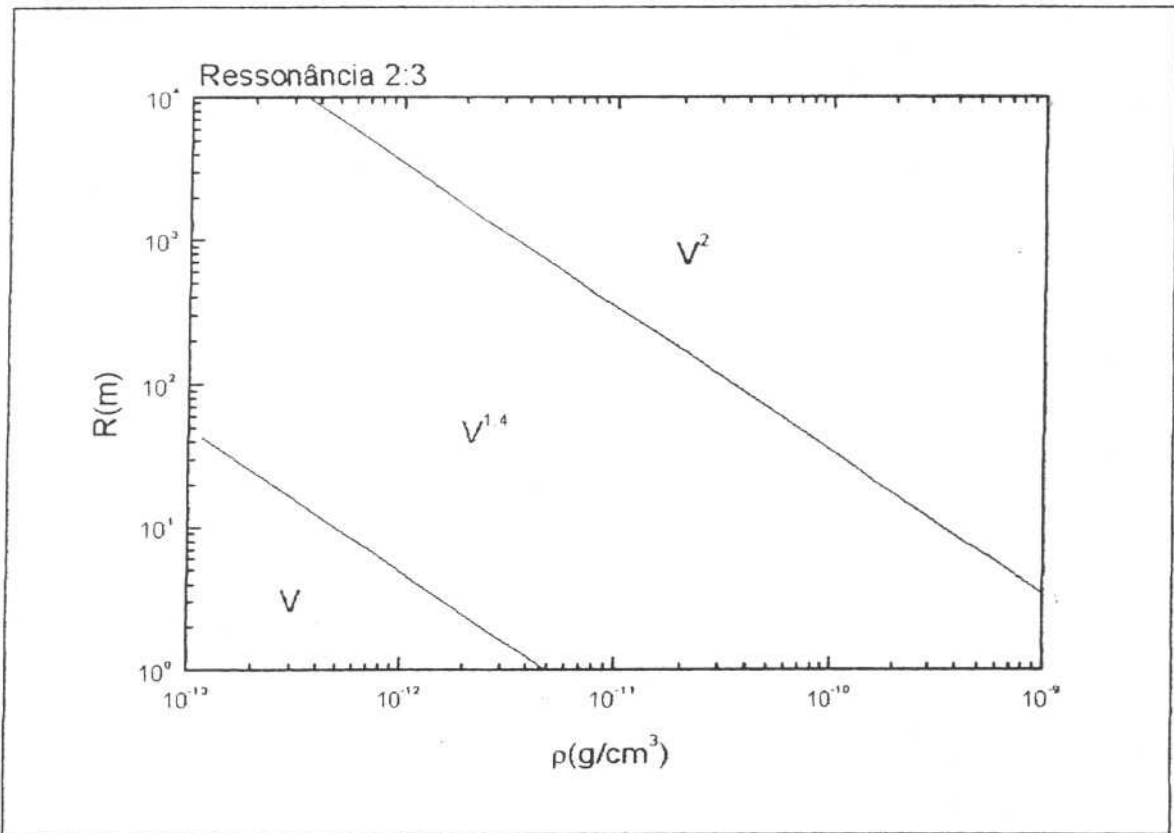


Figura 3.9. Gráfico mostrando os limites de atuação dos arrastos dados 2^a Eq. (36) em função dos tamanhos dos planetésimos e da densidade do gás na região da ressonância 2:3.

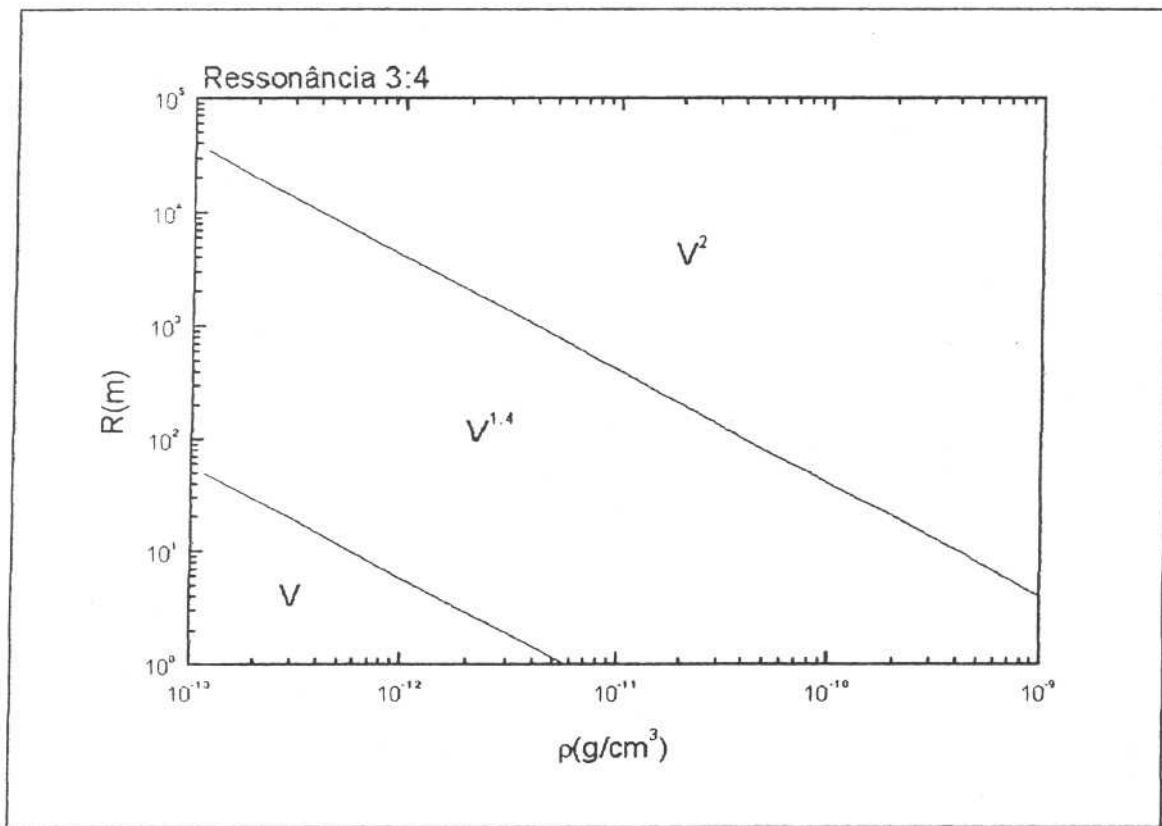


Figura 3.10. Gráfico mostrando os limites de atuação dos arrastos dados 3ª Eq. (36) em função dos tamanhos dos planetésimos e da densidade do gás na região da ressonância 3.4.

Para essas três ressonâncias foi considerado o arrasto Stokes para um gás com densidade igual a $10^{-14} g/cm^3$, o arrasto $V^{1.4}$ e para um gás com densidade igual a $10^{-12} g/cm^3$ e o arrasto V^2 para um gás com densidade igual a $10^{-10} g/cm^3$.

3.2.1.1. Gráficos $V_{rel} \times K$ e $V_{rel} \times R$ para a ressonância 1:2

A seguir são apresentados os resultados para as simulações de colisões entre pares de planetesimos capturados na ressonância 1:2 e arrastos Stokes, $V^{1.4}$ e V^2 .

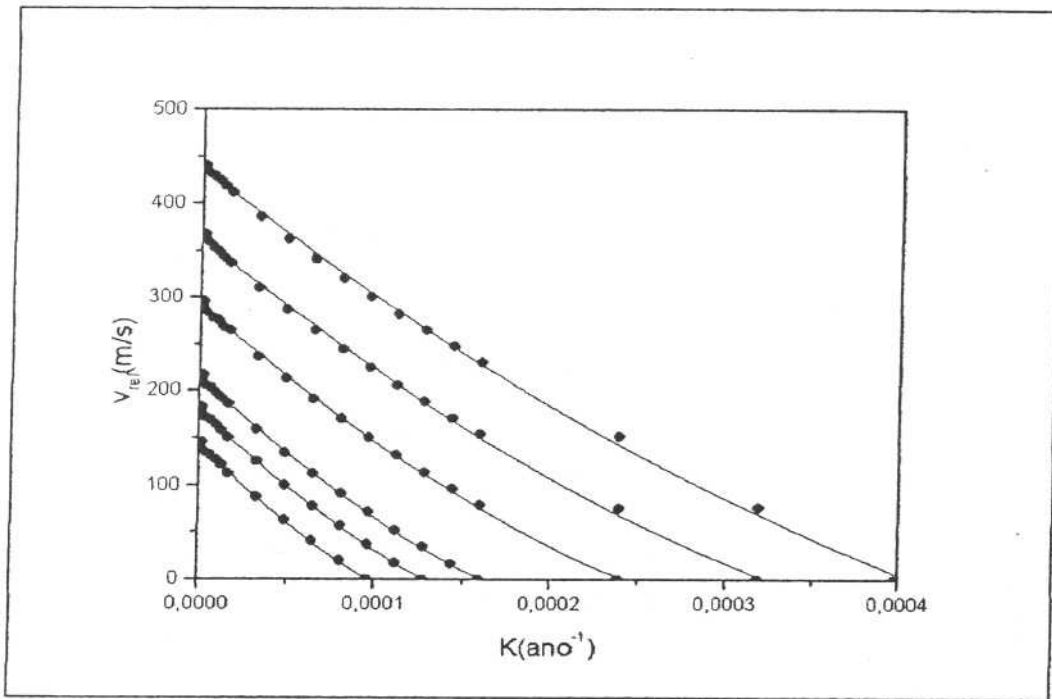


Figura 3.11. Velocidade relativa de colisão em função do coeficiente de arrasto para o arrasto Stokes.

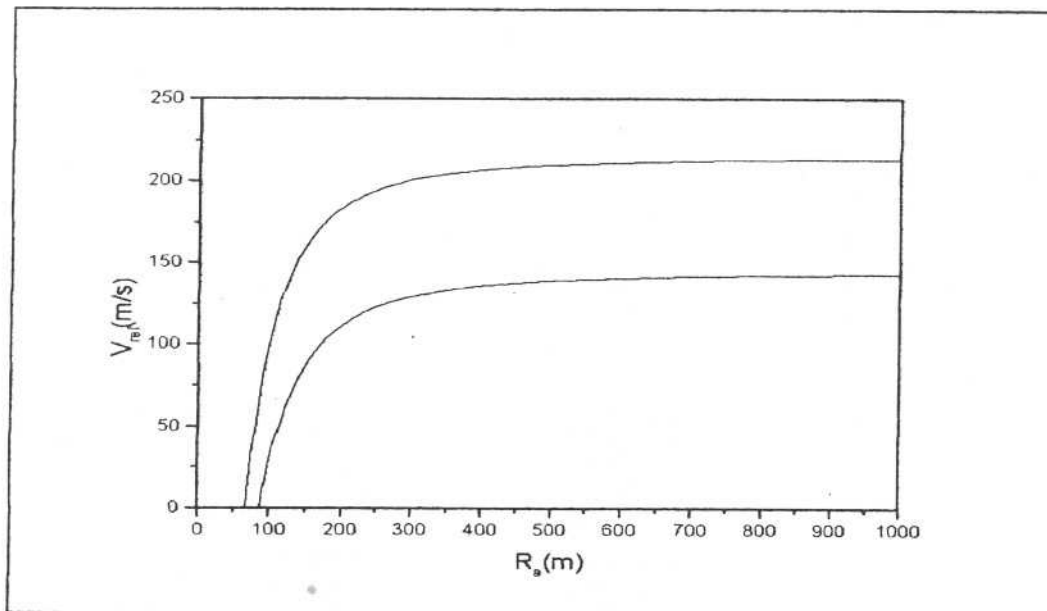


Figura 3.12. Velocidade relativa de colisão em função do raio do planetesimo alvo para dois projéteis de raios iguais 66,8m e 86,2m e para o arrasto Stokes.

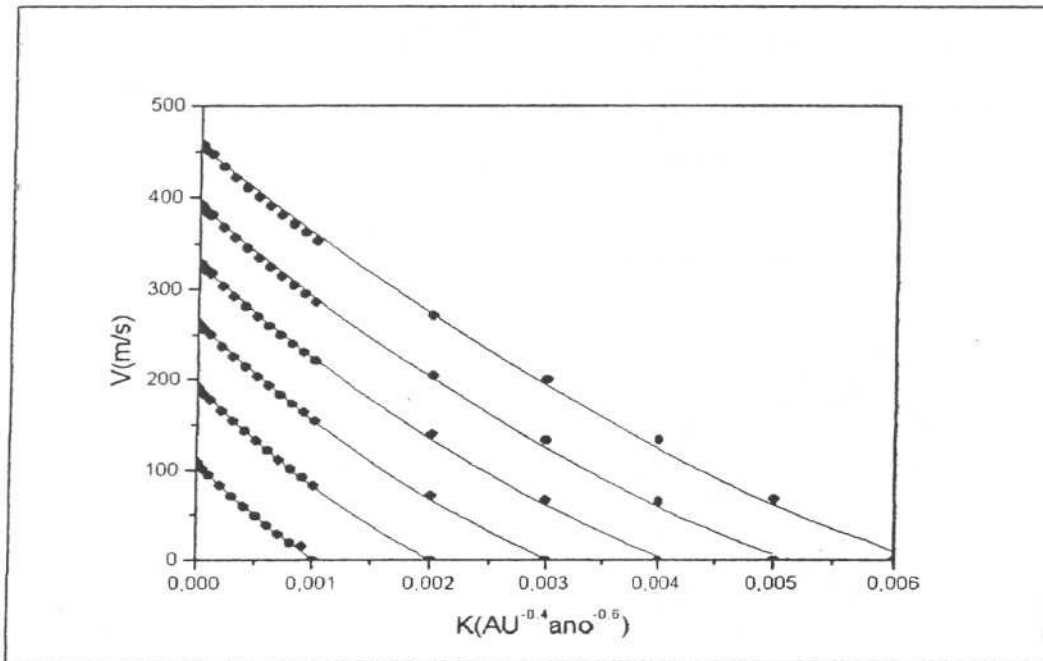


Figura 3.13. Velocidade relativa de colisão em função do coeficiente de arrasto para o arrasto $V^{1,4}$.

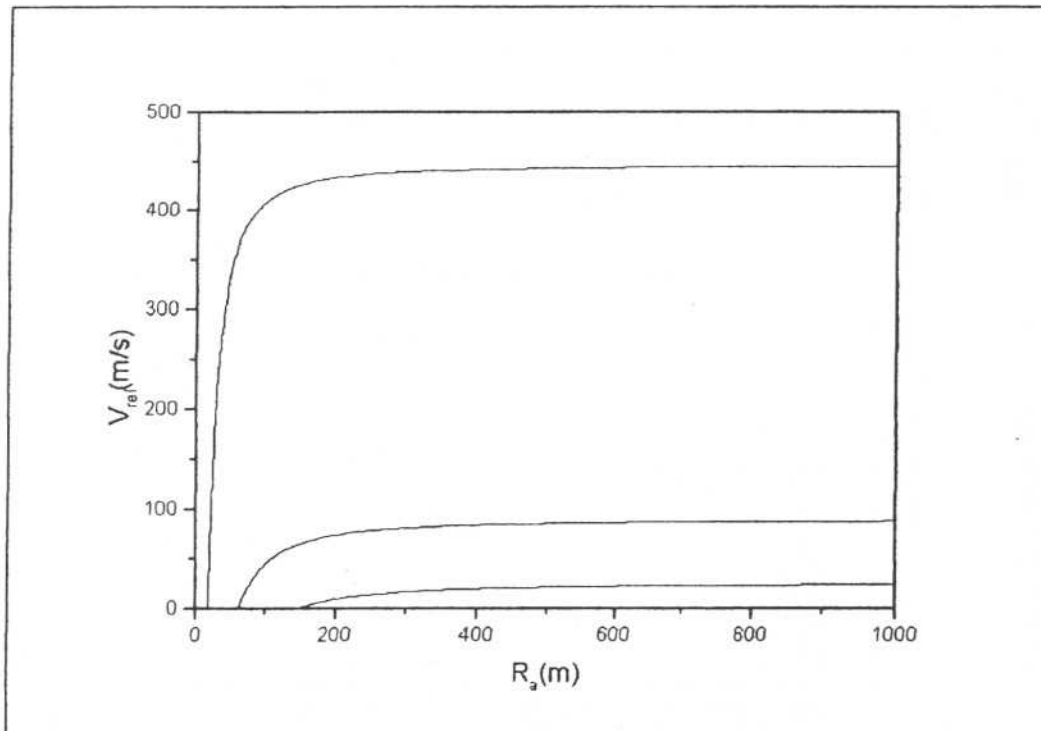


Figura 3.14. Velocidade relativa de colisão em função do raio do planetésimo alvo para dois projéteis de raios iguais 17,1m, 60,3m e 143,3m e para o arrasto $V^{1,4}$.

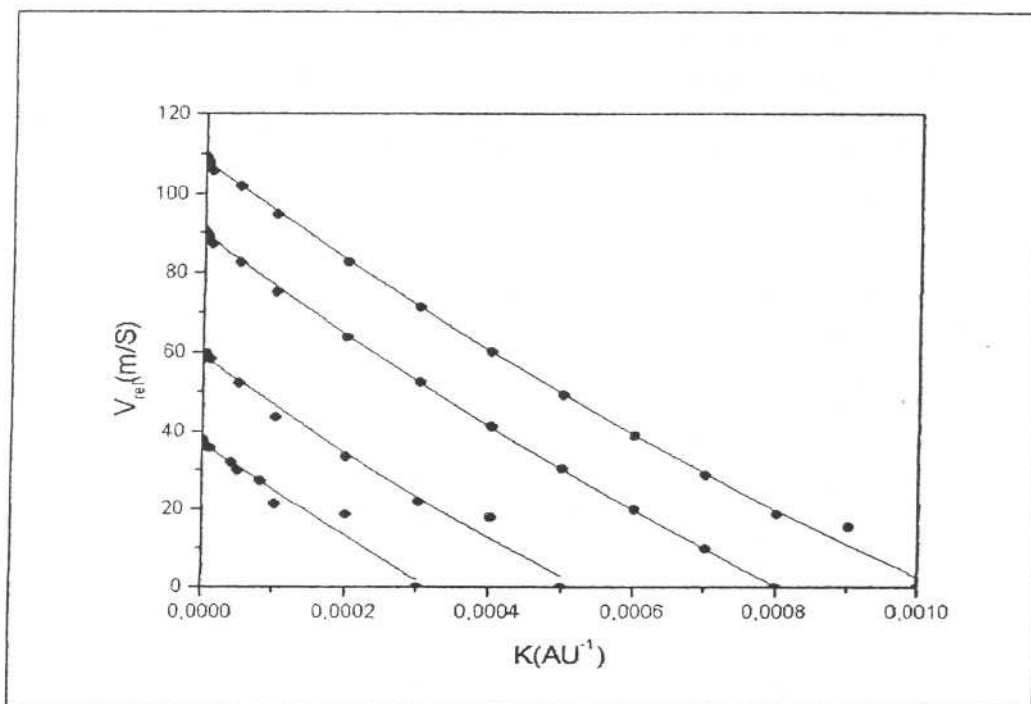


Figura 3.15. Velocidade relativa de colisão em função do coeficiente de arrasto para o arrasto V^2 .

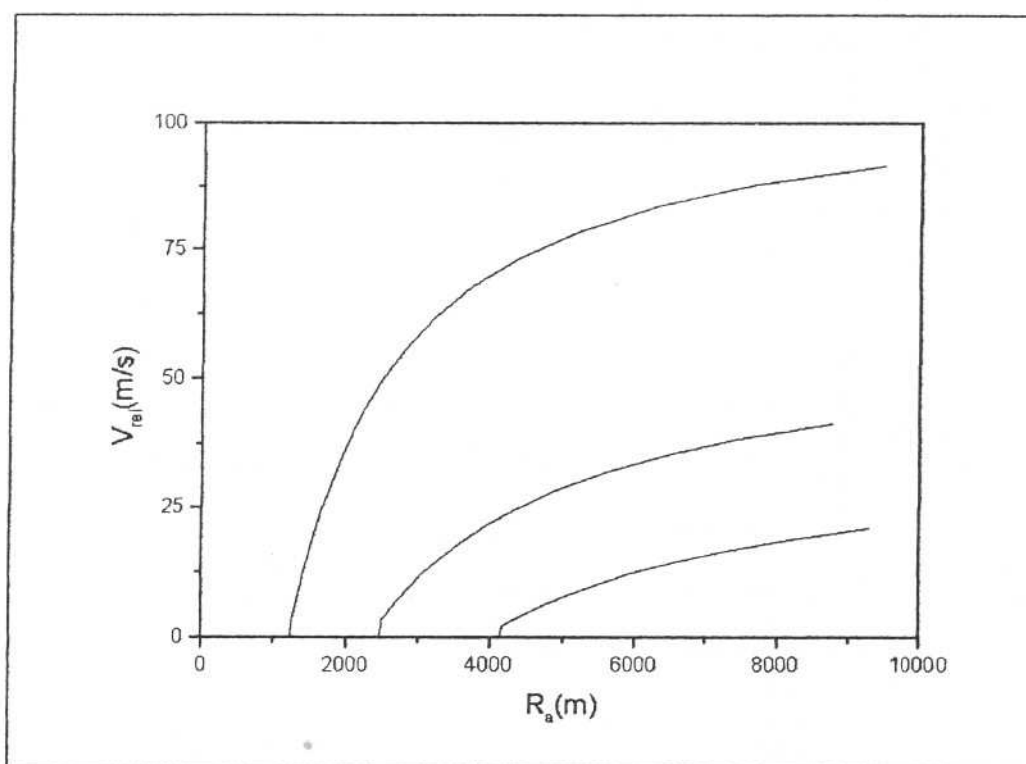


Figura 3.16. Velocidade relativa de colisão em função do raio do planetésimo alvo para dois projéteis de raios iguais 1234,2m, 2468,4m e 4113,9m e para o arrasto V^2 .

3.2.2.2. Gráficos $V_{rel} \times K$ e $V_{rel} \times R$ para a ressonância 2:3

A seguir são apresentados os resultados para as simulações de colisões entre pares de planetésimos capturados na ressonância 2:3 e arrastos Stokes, $V^{1,4}$ e V^2 .

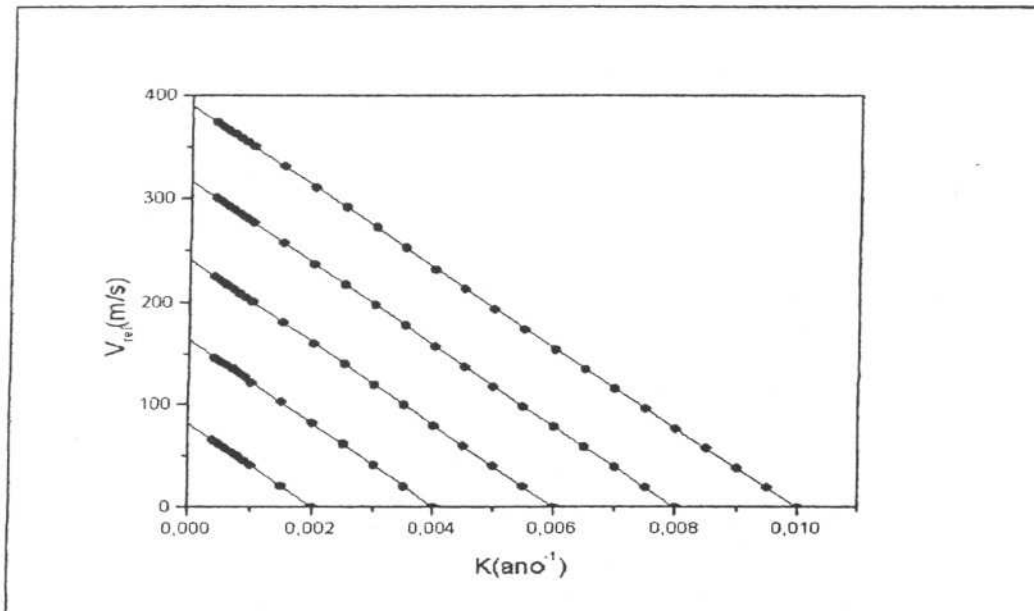


Figura 3.17. Velocidade relativa de colisão em função do coeficiente de arrasto para o arrasto Stokes.

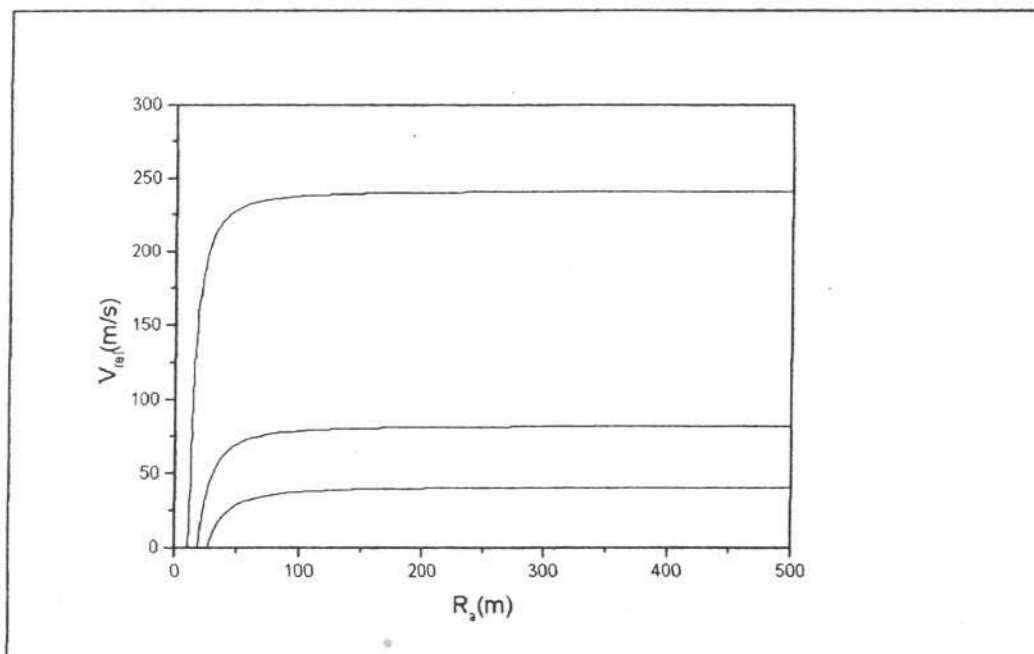


Figura 3.18. Velocidade relativa de colisão em função do raio do planetésimo alvo para dois projéteis de raios iguais 10,9m, 18,8m e 26,6m e para o arrasto Stokes.

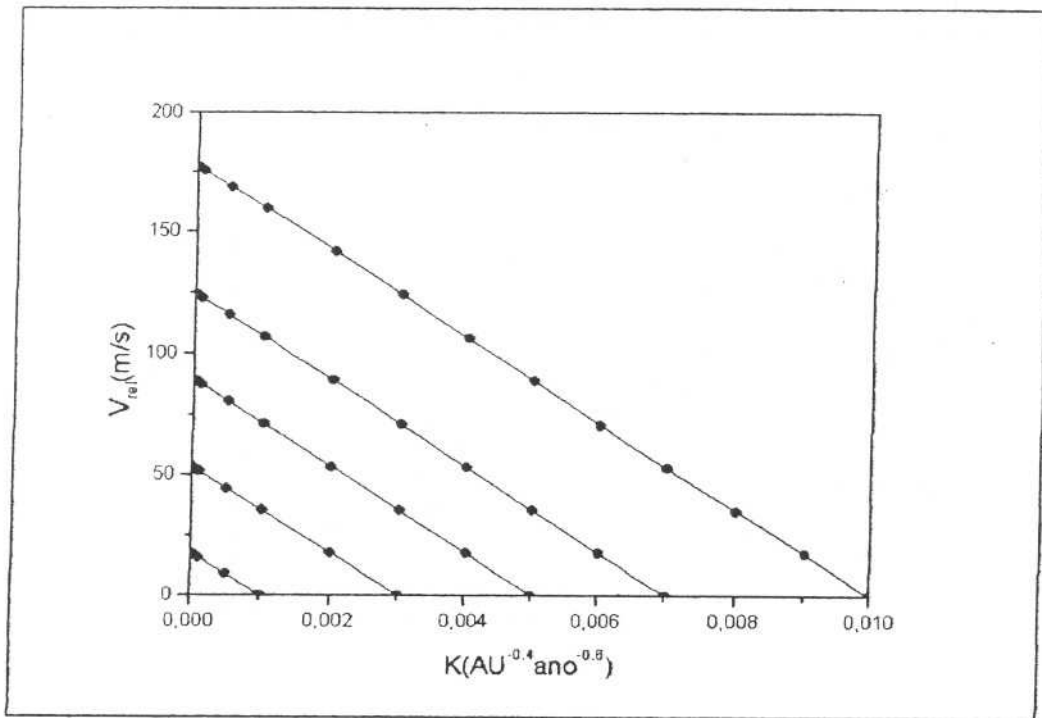


Figura 3.19. Velocidade relativa de colisão em função do coeficiente de arrasto para o arrasto $V^{1.4}$.

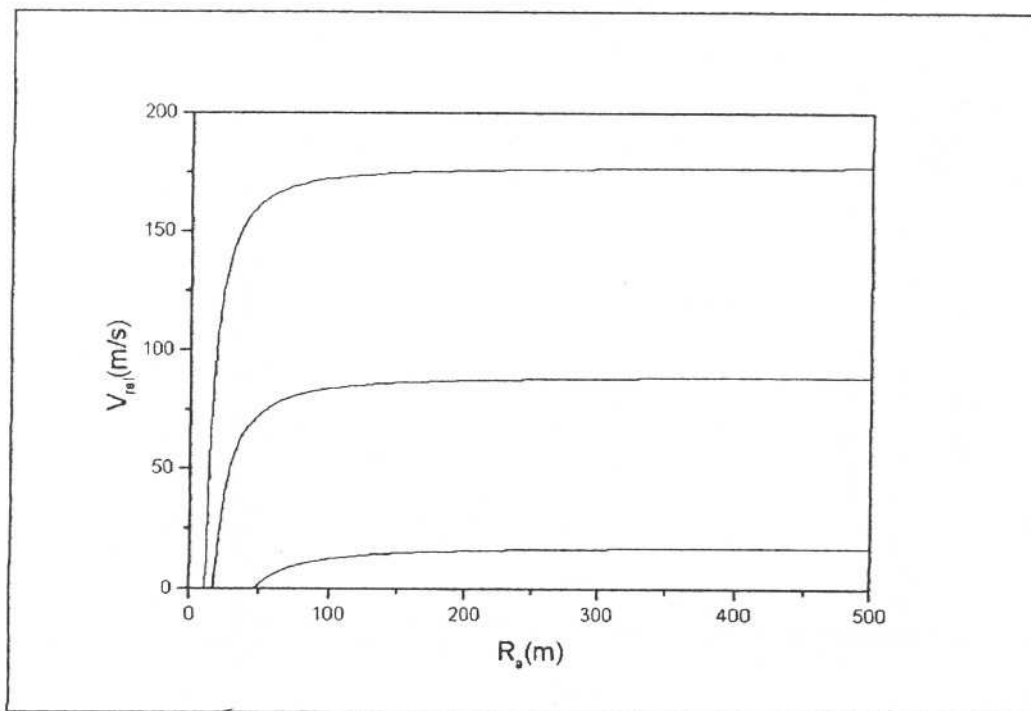


Figura 3.20. Velocidade relativa de colisão em função do raio do planetésimo alvo para dois projéteis de raios iguais 17,1m, 60,3m e 143,3m e para o arrasto $V^{1.4}$.

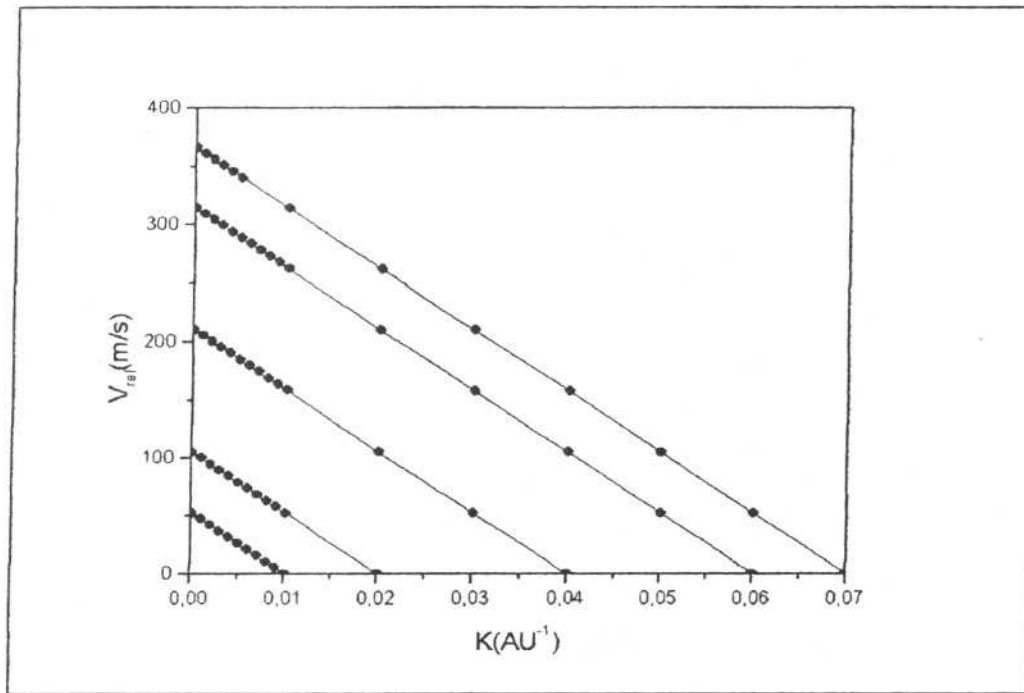


Figura 3.21. Velocidade relativa de colisão em função do coeficiente de arrasto para o arrasto V^2 .

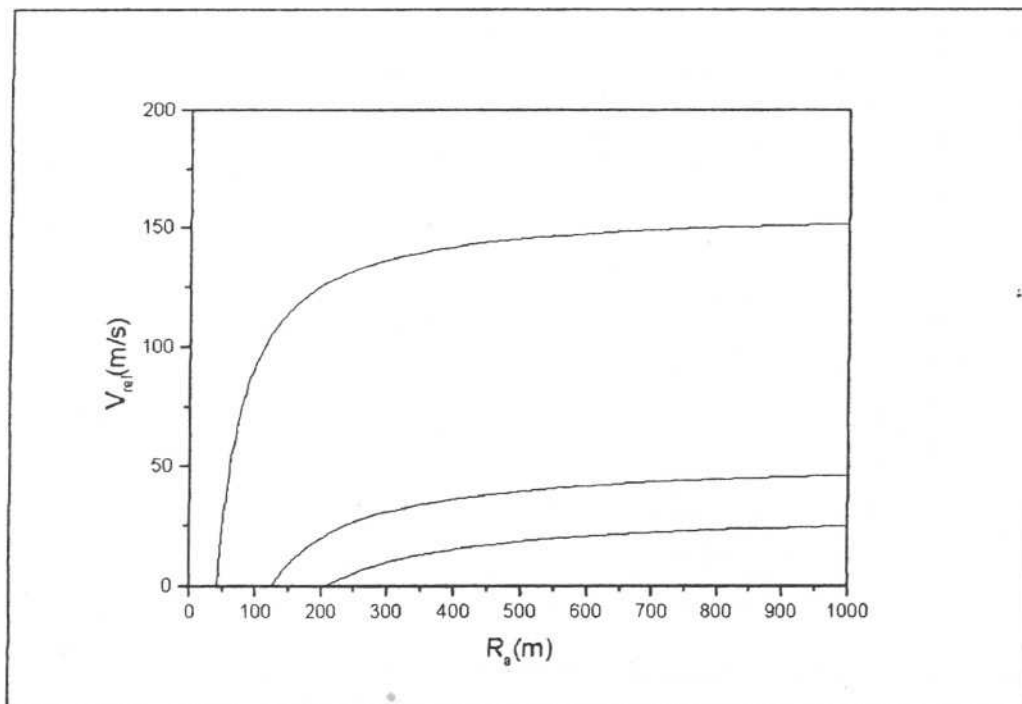


Figura 3.22. Velocidade relativa de colisão em função do raio do planetésimo alvo para dois projéteis de raios iguais 41,1m, 123,4m e 205,7m e para o arrasto V^2 .

3.2.2.3. Gráficos $V_{rel} \times K$ e $V_{rel} \times R$ para a ressonância 3:4

A seguir são apresentados os resultados para as simulações de colisões entre pares de planetesimos capturados na ressonância 3:4 e arrastos Stokes, $V^{1,4}$ e V^2 .

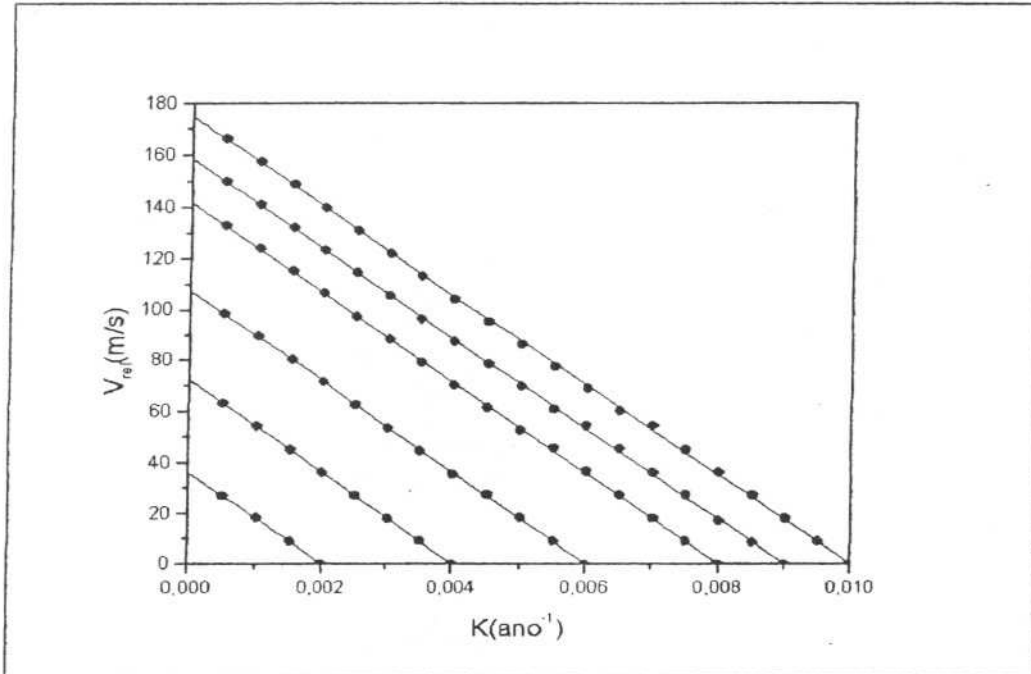


Figura 3.23. Velocidade relativa de colisão em função do coeficiente de arrasto para o arrasto Stokes.

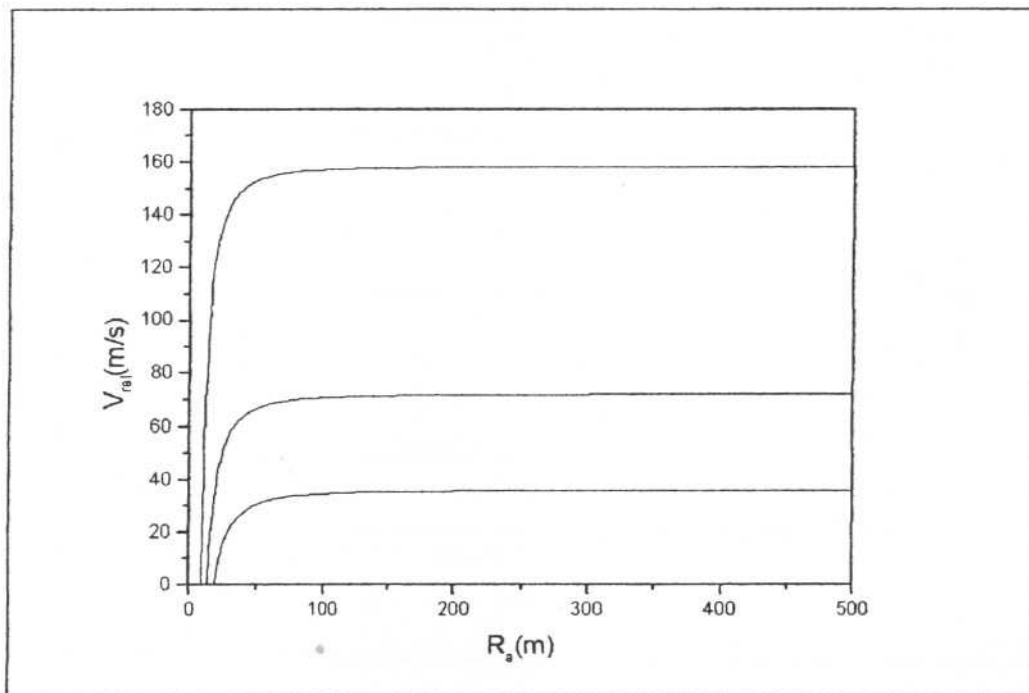


Figura 3.24. Velocidade relativa de colisão em função do raio do planetesimo alvo para dois projéteis de raios iguais 8,9m, 13,3m e 18,8m e para o arrasto Stokes.

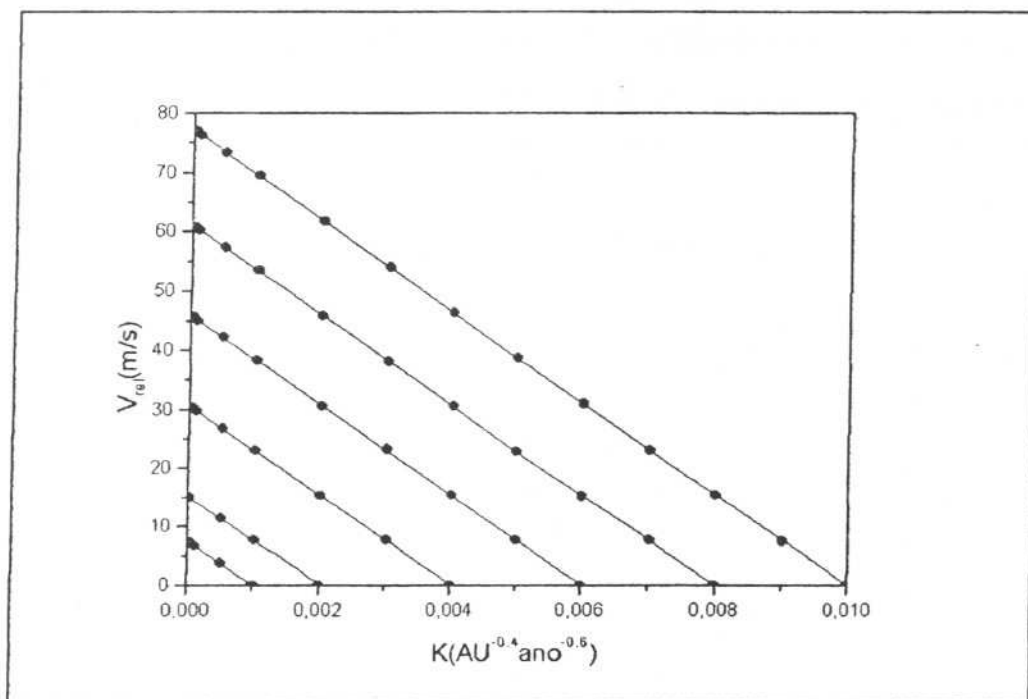


Figura 3.25. Velocidade relativa de colisão em função do coeficiente de arrasto para o arrasto $V^{1,4}$.

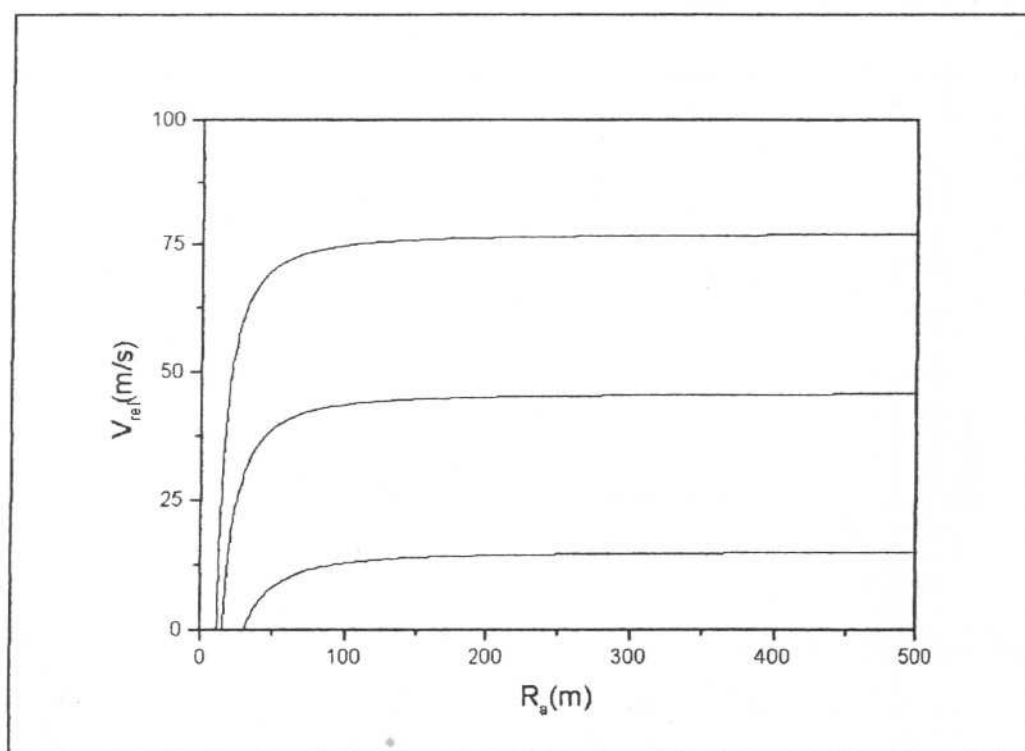


Figura 3.26. Velocidade relativa de colisão em função do raio do planetésimo alvo para dois projéteis de raios iguais 11,0m, 15,1m e 30,1m e para o arrasto $V^{1,4}$.

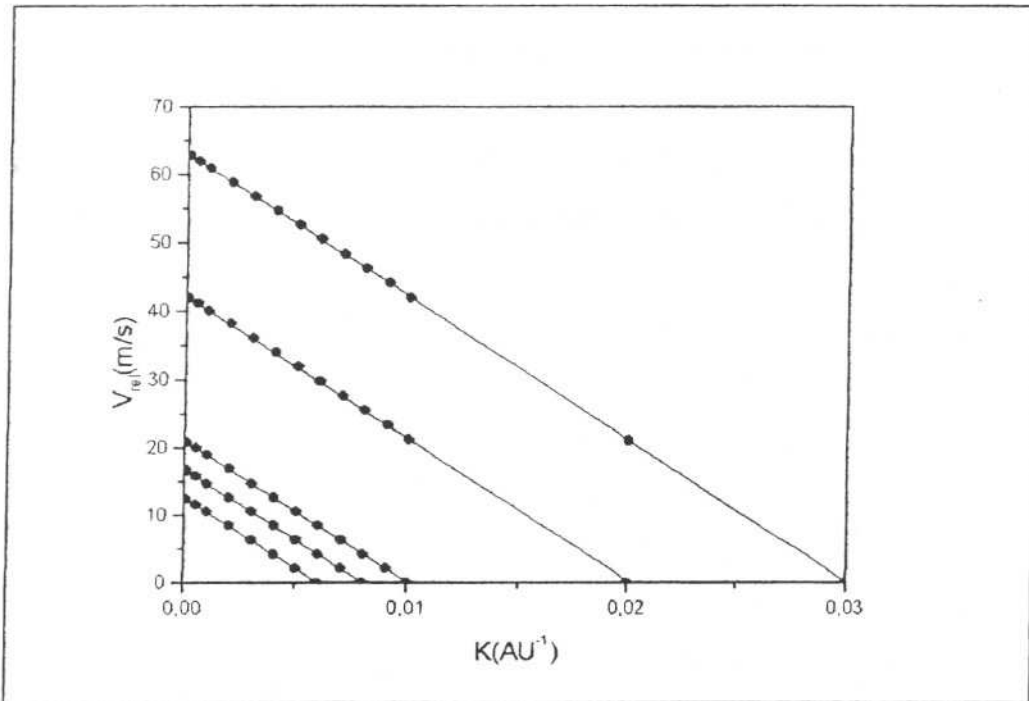


Figura 3.27. Velocidade relativa de colisão em função do coeficiente de arrasto para o arrasto V^2 .

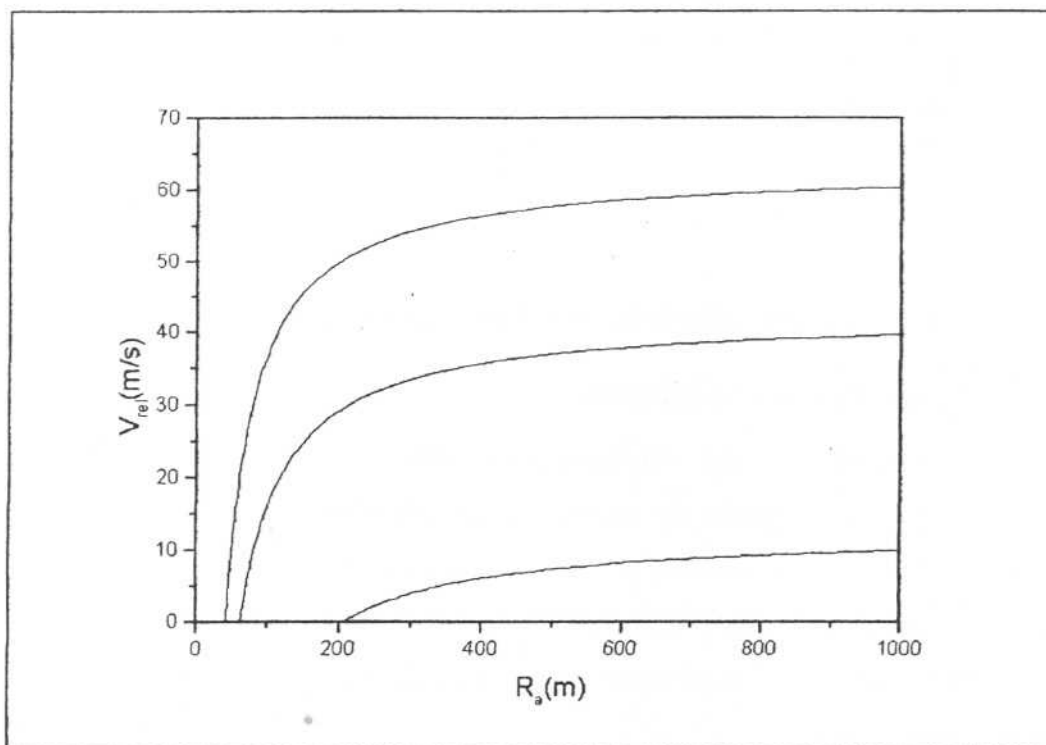


Figura 3.28. Velocidade relativa de colisão em função do raio do planetesímo alvo para dois projéteis de raios iguais 61,7m, 41,1m e 205,7m e para o arrasto V^2 .

Estes gráficos mostram que as velocidades relativas de colisão, em geral, são maiores para o arrasto Stokes e menores para o arrasto V^2 , isto implica que estas são maiores nas regiões onde a densidade do gás é menor, o que era de se esperar já que uma maior densidade tem um efeito maior sobre a circularização da órbita. É observado também que as colisões entre planetésimos capturados numa mesma ressonância podem se dar a uma velocidade relativamente baixa o que poderia levar a um ganho de massa na colisão entre dois planetésimos. Contudo não sabemos se as colisões se darão preferencialmente nestes pontos mas, espera-se que a probabilidade seja maior nos pontos de menor velocidade, já que sendo os ângulos de intercessão das órbitas menores, os planetésimos ficarão mais tempo em posições onde a colisão seja possível.

Por fim, é importante notar que foi feito um ajuste quadrático aos pontos para a ressonância 1:2 e ajustes lineares para as 2:3 e 3:4.

A seguir vamos determinar analiticamente, a partir de um modelo para fragmentação entre colisões, uma expressão para o cálculo da velocidade relativa de colisão entre dois planetésimos para o caso em que há um ganho de massa do planetésimo alvo. Com isto poderemos investigar em que condições uma colisão entre dois planetésimos capturados numa mesma ressonância poderia levar favorecer a um crescimento de massa.

3.3. Modelo para cálculo de fragmentação em uma colisão entre pares de planetésimos

Uma colisão entre dois planetésimos de massas M_a (alvo) e M_p (projétil) pode resultar em perda ou ganho de massa do planetésimo alvo. Nessa seção, vamos determinar qual a condição para que uma colisão entre dois planetésimos resulte em ganho de massa do alvo. Seguindo as condições de fragmentação dadas por Wetherill e Stewart (1993) define-se inicialmente a velocidade de impacto V_I em relação ao centro de massa, a qual é dada por

$$V_I^2 = V_{rel}^2 + V_{esc}^2 \quad (48)$$

onde, V_{rel} é a velocidade relativa de colisão entre os planetésimos e V_{esc} é a velocidade de escape do conjunto dada por

$$V_{esc} = \sqrt{\frac{2G(M_a + M_p)}{(R_a + R_p)}} \quad (49)$$

A energia de fragmentação (Q_f) em relação ao centro de massa é dada por

$$Q_f = \frac{k_1}{2} V_I^2 \frac{M_a M_p}{(M_a + M_p)} \quad (50)$$

onde $k_1 = 0.5$ é chamado coeficiente de eficiência do impacto. Este coeficiente mede a fração da energia de impacto que não é dissipada como calor.

A massa do material fragmentado (M_f) devido ao impacto é dada por

$$M_f = \frac{Q_f}{Q_c} \quad (51)$$

onde a energia de esmagamento Q_c é tomada como 10^7 erg/g , pois foi considerado planetésimos com densidade 2 g/cm^3 . Para planetésimos com densidade 3 g/cm^3 é usado o valor 10^8 erg/g para Q_c (valor considerado para materiais mais duros).

A massa do material fragmentado (M_e) devido a colisão que escapa gravitacionalmente é dada por

$$M_e = k_3 M_f V_{esc}^{-2.25} \quad (52)$$

onde, $k_3 = 3 \times 10^6 (\text{cm/s})^{2.25}$.

A condição para que haja ganho de massa do planetésimo alvo é dada por

$$M_e \leq M_p \quad (53)$$

A partir da curva obtida analiticamente pela Eq. (53) podem-se determinar os tamanhos limite de um planetésimo alvo e um projétil, para que em uma colisão não haja nem perda nem ganho de massa do planetésimo alvo. Chamaremos esta solução de “solução limite” de ganho de massa.

A figura 3.29 mostra as curvas velocidade relativa de colisão em função do raio do planetésimo alvo para um projétil de 45,7m capturado na ressonância 2:3 e arrasto $V^{1.4}$. A curva pontilhada mostrada no gráfico foi obtida a partir da Eq. (53). Observa-se, que as “soluções limite” de ganho de massa do planetésimo alvo são dadas pelas interseções das duas curvas do gráfico. Neste exemplo as “soluções limite”

correspondem a alvos de raios aproximadamente iguais a 47,3m e 844,7m para colisões com o projétil de raio igual a 45,7m, ou seja, se o raio do alvo for menor que 47,3m (e maior que o projétil) ou maior que 844,7m, haverá ganho de massa do alvo.

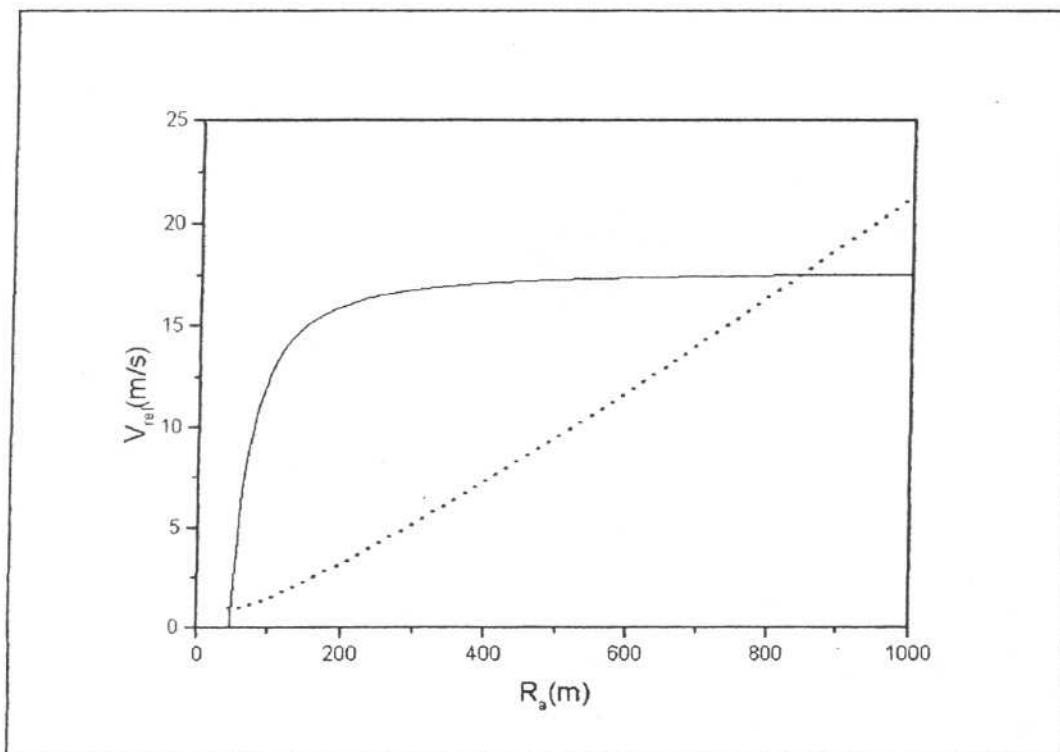


Figura 3.29. Gráfico velocidade relativa de colisão e velocidade relativa limite de colisão para ganho de massa (curva pontilhada) em função do raio do planetésimo alvo para colisões com um planetésimo projétil de raio aproximadamente igual a 45,7m. Abaixo da linha pontilhada nas iteções, há ganho de massa.

3.4. Soluções limite de ganho de massa para os modelos de arrasto $V^{1,4}$ e V^2

As “soluções limite” para ganho de massa do planetésimo alvo são dadas pela interseções das duas equações $V = V(R_a)$ conforme foi mostrado pela figura 3.29.

Da figura 3.30 até a figura 3.34 são mostradas as “soluções limite” (obtidas analiticamente, já que as duas curvas são analíticas) de ganho de massa para as ressonâncias 1:2, 2:3 e 3:4 com os arrastos dos tipos $V^{1,4}$ e V^2 e órbita planetária circular. Nessas curvas são colocados os pontos de interseção vistos na figura 3.29. A região do plano $R_a \times R_p$ exterior a curva, representa a região de ganho de massa em qualquer colisão (representada na figura 3.30).

i) Ressonância 1:2:

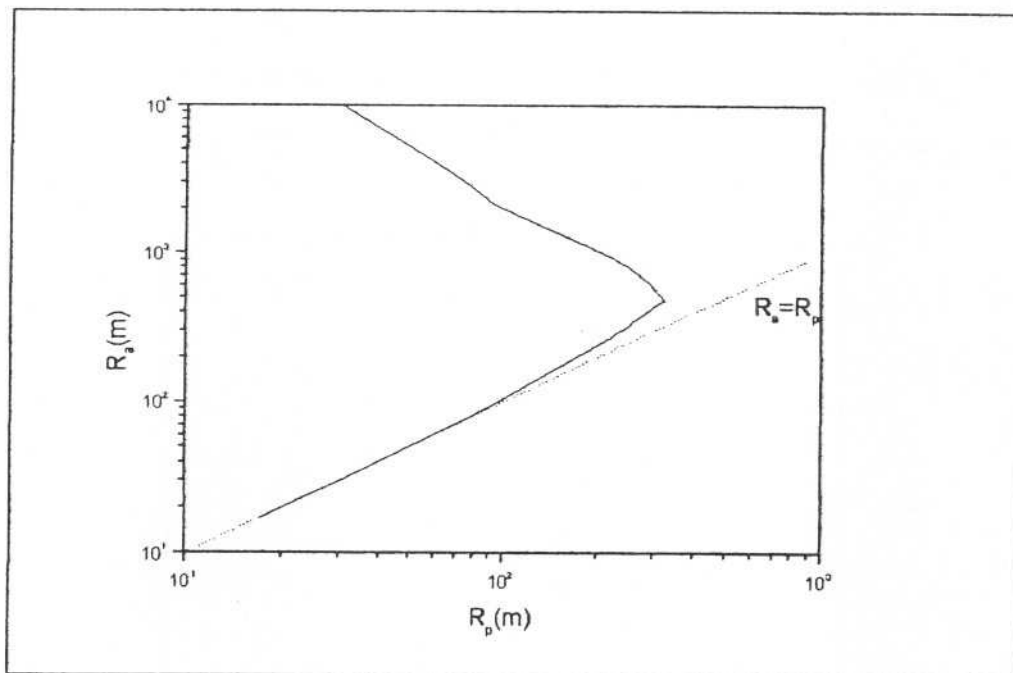


Figura 3.30. Soluções limite de ganho de massa no plano $R_a \times R_p$ para o arrasto $V^{1,4}$.

ii) Ressonância 2:3:

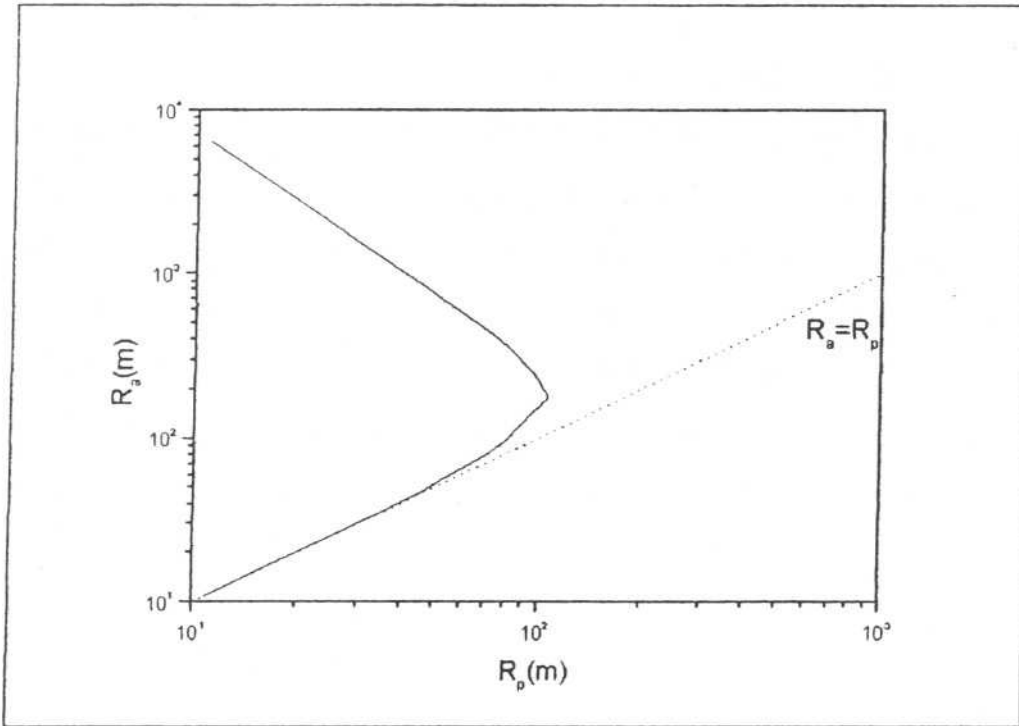


Figura 3.31. Soluções limite de ganho de massa no plano $R_a \times R_p$ para o arrasto $V^{1.4}$.

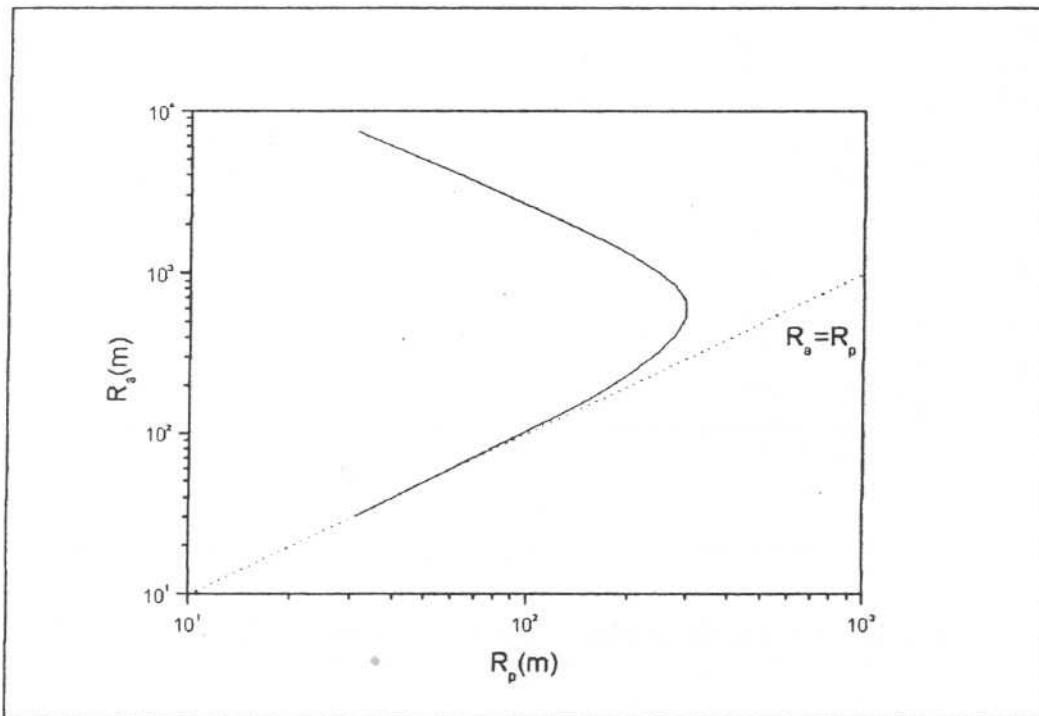


Figura 3.32. Soluções limite de ganho de massa no plano $R_a \times R_p$ para arrasto V^2 .

iii) Ressonância 3:4:

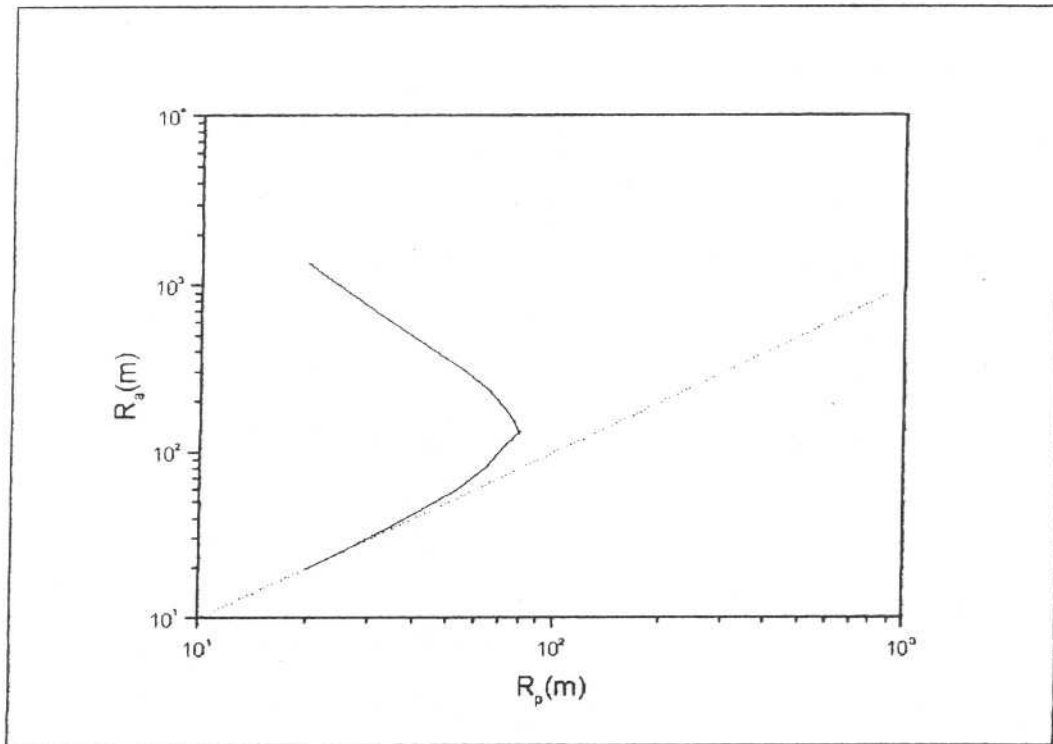


Figura 3.33. Soluções limite de ganho de massa no plano $R_a \times R_p$ para arrasto $V^{1.4}$.

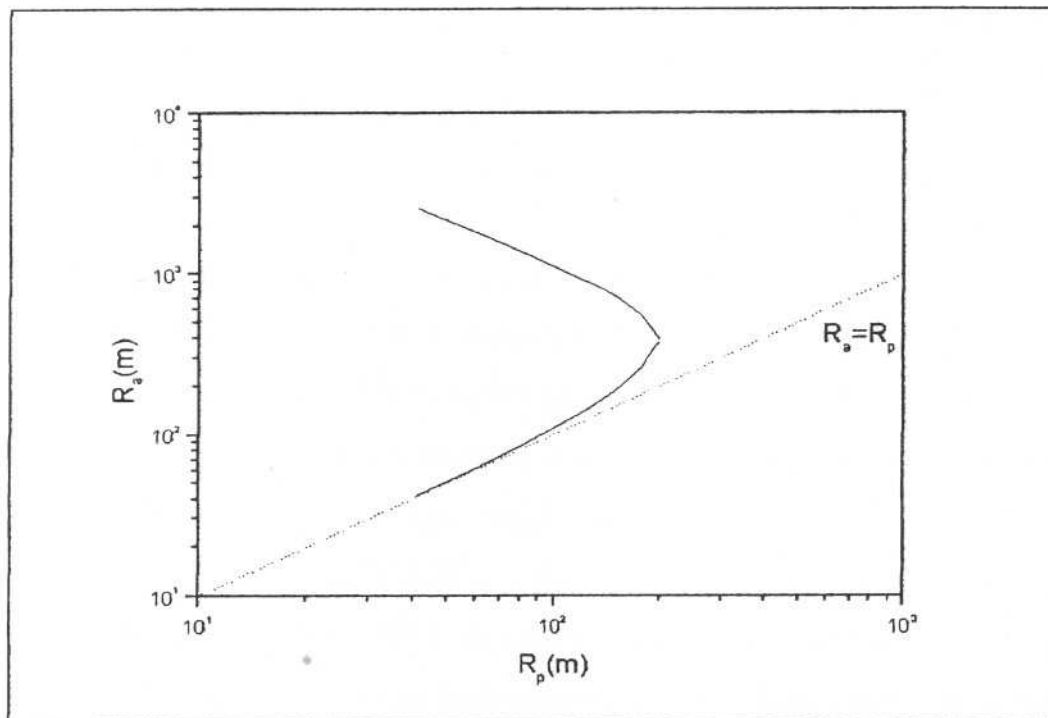


Figura 3.34. Soluções limite de ganho de massa no plano $R_a \times R_p$ para arrasto V^2 .

3.4.1. Análise dos resultados para o caso de órbita planetária circular

Analisando estes gráficos conclui-se que haverá ganho de massa para colisões:

- i) Entre planetésimos de tamanhos semelhantes, sempre.
- ii) Entre alvos com qualquer tamanho (maior que o projétil) com projéteis maiores que 300m, para a ressonância 1:2, 100m para a ressonância 2:3 e 80m para a ressonância 3:4 e arrasto $V^{1,4}$.
- iii) Entre alvos com qualquer tamanho (maior que o projétil) com projéteis maiores que 300m, para a ressonância 2:3 e 200m para a ressonância 3:4 e arrasto V^2 .
- iv) Para projéteis muito pequenos e alvos muito grandes, por exemplo, uma colisão entre um projétil de 50m com um alvo de 5000m (figura 3.32).

Desta análise podemos afirmar que as colisões entre pares de planetésimos cujos movimentos estão vinculados a uma órbita ressonante exterior a um planeta que resultam em ganho de massa de um dos planetésimos, devem ocorrer de maneira restrita, pois de acordo com o modelo de formação planetária adotado, com um planeta gigante previamente formado, devemos pensar que estejam formados muito mais planetésimos de menor tamanho que os de maior tamanho. De modo que o ganho de massa deve ocorrer a partir de colisões entre os planetésimos menores mas com a aglutinação dos mesmos para formar os maiores.

Nesta seção, procuramos estabelecer as condições para que uma colisão resultasse em ganho de massa do alvo. Estas condições foram estabelecidas para três importantes ressonâncias (1:2, 2:3 e 3:4) e dois modelos de força dissipativa ($V^{1,4}$ e V^2). O arrasto Stokes não foi considerado pois este só tem aplicação se for considerado um modelo de nebulosa em que a densidade seja $\sim 10^{-14} \text{ g/cm}^3$, para as regiões de ressonância em questão, sendo este um valor muito abaixo dos encontrados na literatura para estas distâncias heliocêntricas (Patterson 1987, Weidenschilling 1987). Outra consideração aos resultados obtidos deve ser feita com relação ao arrasto $V^{1,4}$. Observe que entre os regimes V e V^2 , um planetésimo pode estar sob um arrasto proporcional a uma potência diferente de 1,4 e que está sendo considerado como 1,4. Vejamos

novamente as figuras 3.6, 3.7 e 3.8. Um planetésimo com raio igual a 200m em um gás de densidade igual $10^{-11} g/cm^3$ estaria na região do arrasto $V^{1,4}$, embora o ponto no plano $R \times \rho$ esteja mais para um arrasto com expoente da velocidade próximo de dois do que para um arrasto com expoente igual a 1,4. Desta maneira o resultado de uma simulação de colisão com este planetésimo não dará um resultado preciso. Sendo assim, tentaremos melhorar as soluções obtidas considerado um modelo de arrasto que varia continuamente como o coeficiente da força dissipativa. Com isto esperamos obter resultados mais precisos.

3.5. Soluções limite de ganho de massa para um modelo de arrasto variável

Os resultados obtidos com o modelo de arrasto intermediário considerado ($\sim V^{1.4}$) não modela com precisão o arrasto sofrido pelo planetésimo na região do plano $R \times \rho$, conseqüentemente os resultados obtidos com este modelo não são muito precisos. Uma alternativa para este problema seria o de considerar um modelo de arrasto variável de tal modo que a expressão da força dissipativa variasse continuamente de Stokes a V^2 .

O modelo é construído a partir dos dados empíricos que relaciona o coeficiente de arrasto adimensional (C_D) com o número de Reynolds (Prandtl 1952). Para estes dados foi feito um ajuste aos pontos usando um polinômio do 6º grau (figura 3.37). Com isso, obtém-se uma expressão pontual para o modelo de força dissipativa em função de parâmetros físicos da nebulosa.

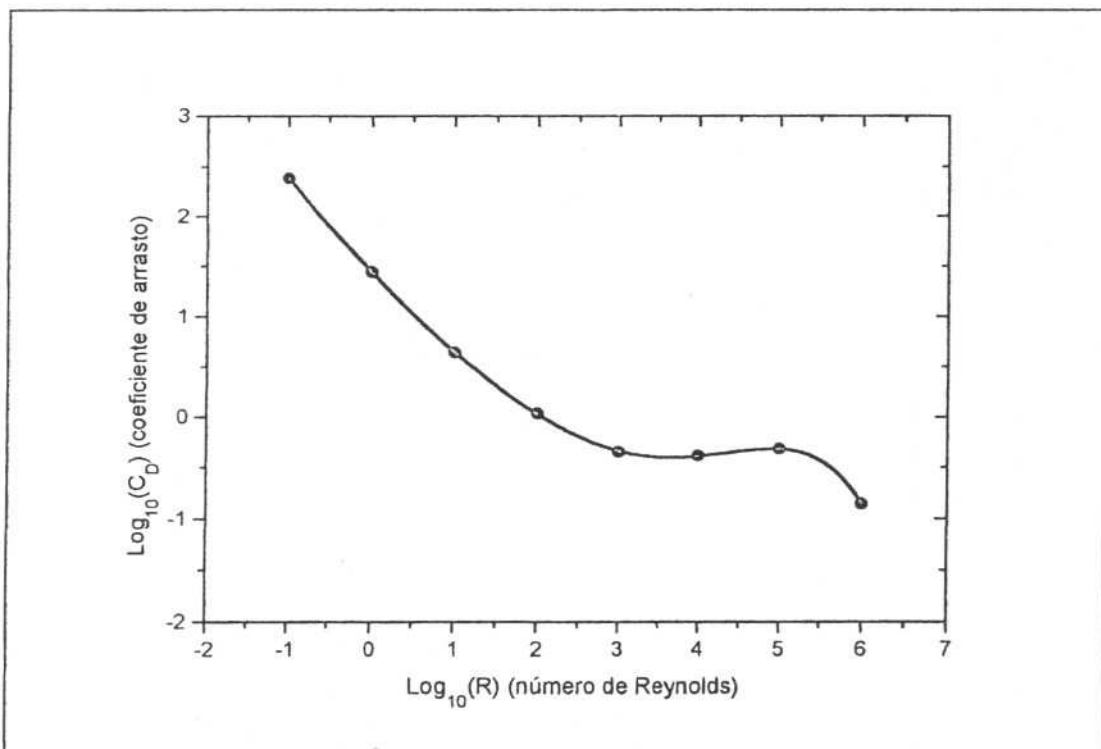


Figura 3.37. Ajuste polinomial de 6ª ordem para os pontos empíricos que relaciona o número de Reynolds com o coeficiente de arrasto adimensional C_D (Prandtl 1952).

No modelo considerado a densidade e temperatura no plano médio da nebulosa são representadas por leis de potência (Weidenschilling 1977), ou seja, $\rho(r) = \rho_0(a/r)^{-m}$ e $T(r) = T_0(a/r)^{-n}$, onde r e a são distâncias de um ponto da nebulosa ao Sol. Os parâmetros físicos da nebulosa usados foram: $\rho_0 = 10^{-9} \text{ g/cm}^3$ e $T_0 = 500 \text{ K}$ (densidade e temperatura do gás) a $r=1\text{AU}$ e foi considerado $m=2$ e $n=1$ para as leis de potência. Um outro parâmetro importante do modelo é a viscosidade molecular do gás, a qual é dada por

$$\eta = \frac{m_{H_2} c}{3\sigma} \quad (54)$$

$$\text{onde, } c = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_{H_2}}} \quad (55)$$

onde, m_{H_2} é massa do hidrogênio molecular e k é a constante de Boltzman, c é a velocidade térmica média das moléculas do gás e $\sigma = 2 \times 10^{-15} \text{ cm}^2$ é a seção de choque do H_2 . Por conseguinte $\eta \propto r^{-1/2}$ no modelo de nebulosa considerado.

A figura 3.38 mostra as curvas no plano $V_{\text{rel}} \times R$ para colisões entre alvos (a partir de 40m de raio) com um projétil de raio igual a 40m. Neste caso, para determinar-se as soluções limite foram feitos dois ajustes polinomiais “locais” de 3ª ordem, nas vizinhanças das soluções limite, as quais são dadas por $R_a=40,5\text{m}$ e $R_a=2643,4\text{m}$. Os ajustes aos pontos são mostrados na Fig. 3.39. Com essas considerações foram feitas várias simulações com raios para os planetésimos variando de 10m até 5km para as ressonâncias 1:2, 2:3 e 3:4.

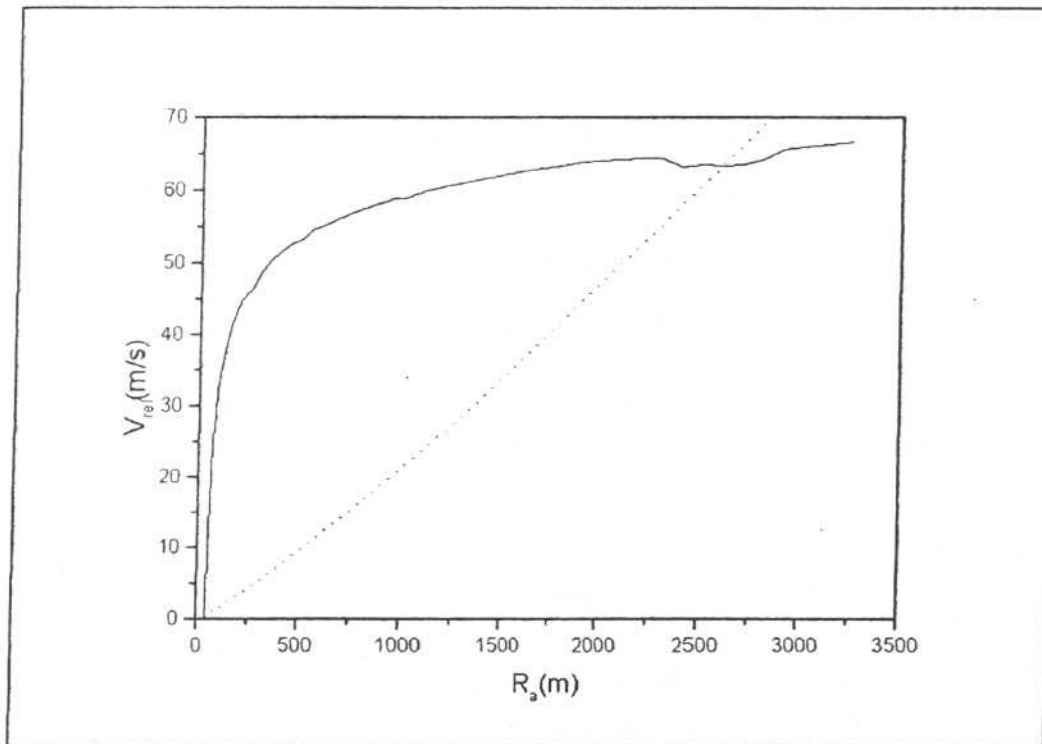


Figura 3.38 Gráfico da velocidade de colisão e da velocidade de colisão limite para ganho de massa em função do raio do planetésimo alvo para um planetésimo projétil com raio aproximadamente igual a 40,0m. Ressonância 2:3.

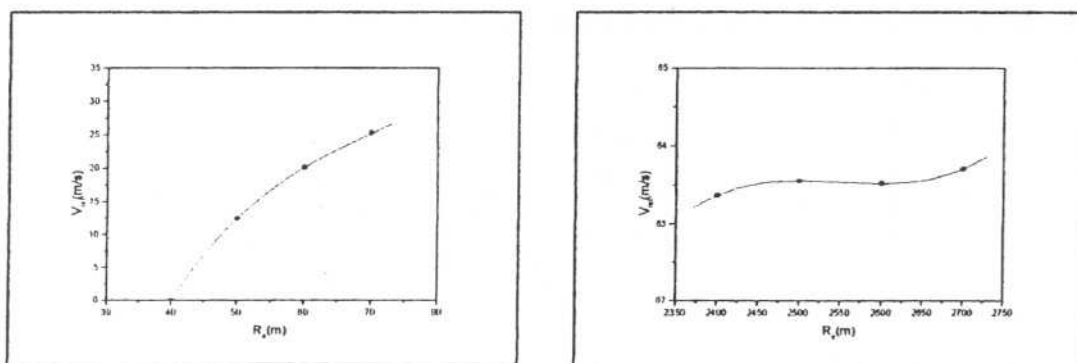


Figura 3.39 Ajustes polinomiais de 3ª ordem em torno das soluções limite $R_a=40,5$ m e $R_a=2643,4$ m.

i) Ressonância 1:2

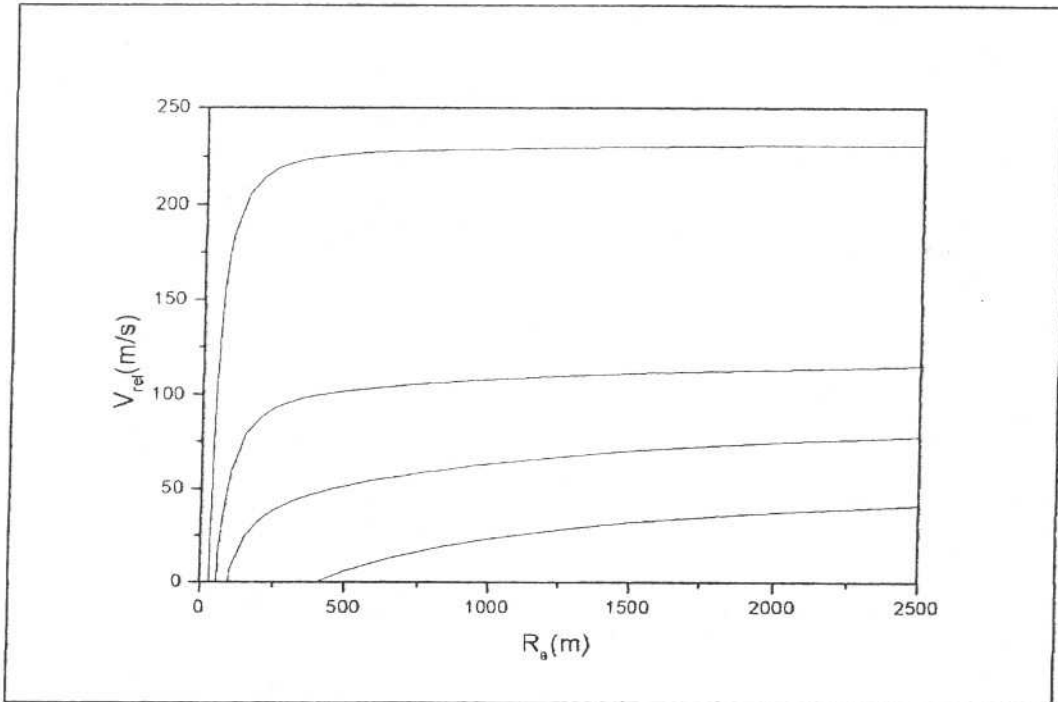


Figura 3.40. Velocidade relativa de colisão em função do raio do planetésimo alvo para dois projéteis de raios iguais 30,0m, 55,0m, 95,0m e 400,0 para o arrasto variável.

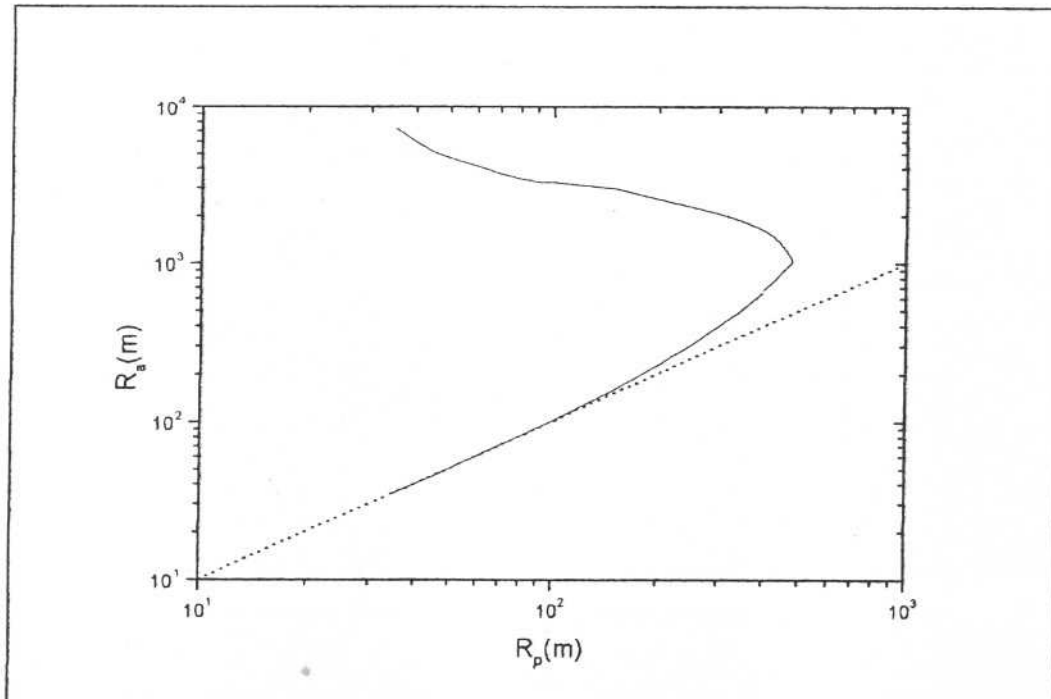


Figura 3.41. Soluções limite de ganho de massa no plano R_a x R_p para o arrasto variável.

ii) Ressonância 2:3

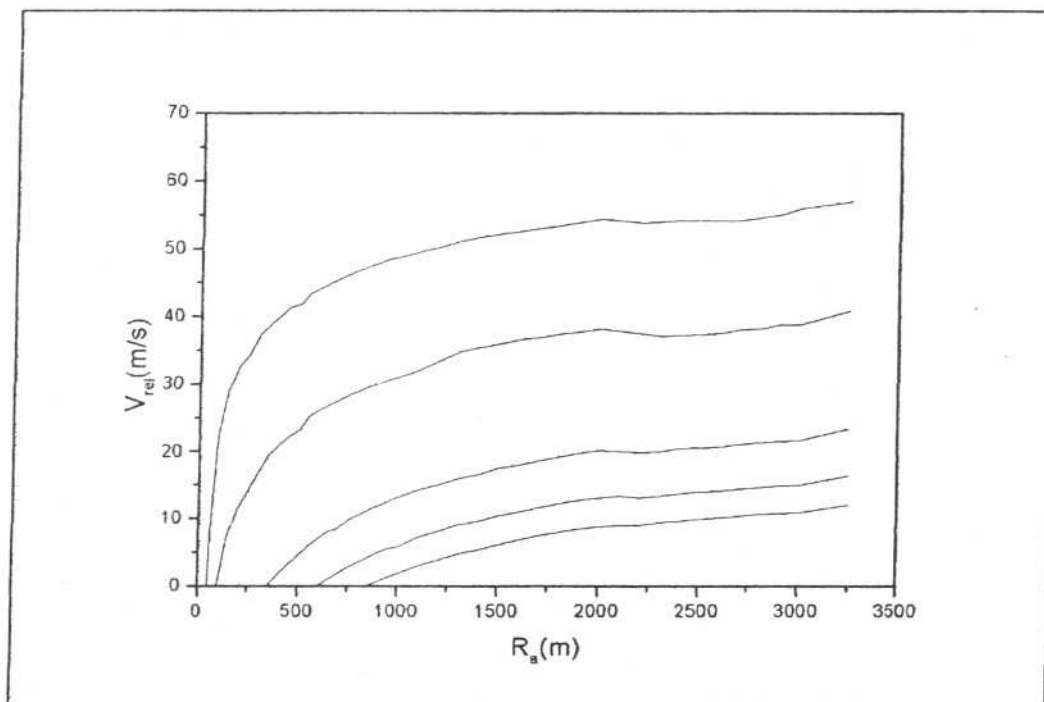


Figura 3.42. Velocidade relativa de colisão em função do raio do planetesimal alvo para dois projéteis de raios iguais 50,0m, 100,0m, 350,0m, 600,0 e 850,0m para o arrasto variável.

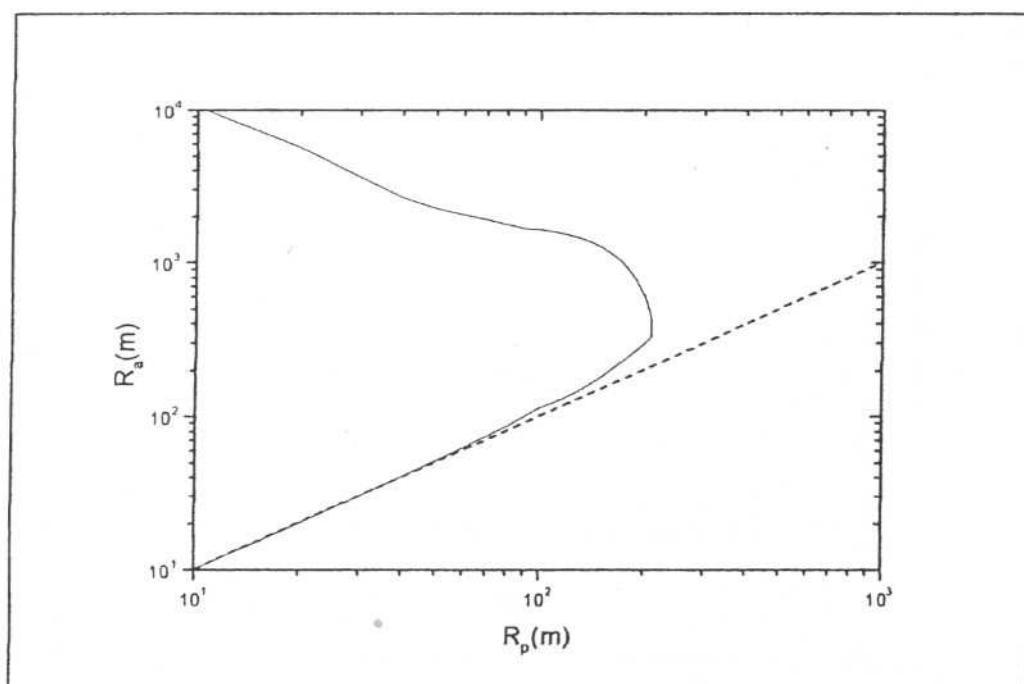


Figura 3.43. Soluções limite de ganho de massa no plano R_a x R_p para o arrasto variável.

iii) Ressonância 3:4

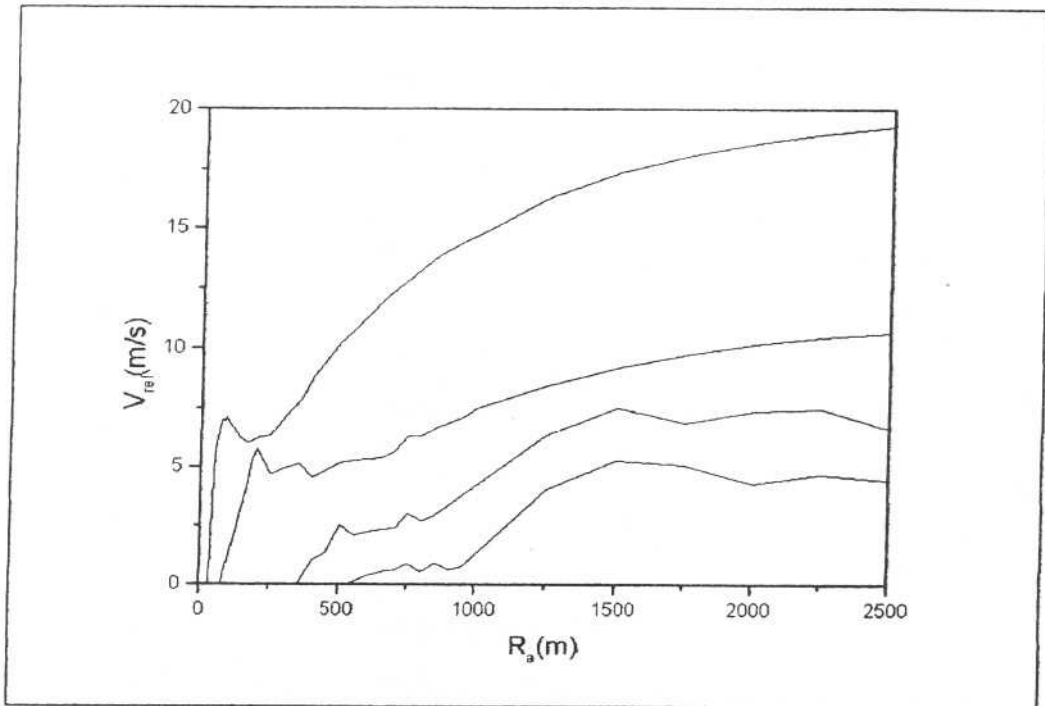


Figura 3.44. Velocidade relativa de colisão em função do raio do planetesímo alvo para dois projéteis de raios iguais 30,0m, 70,0m, 350,0m e 500,0 para o arrasto variável.

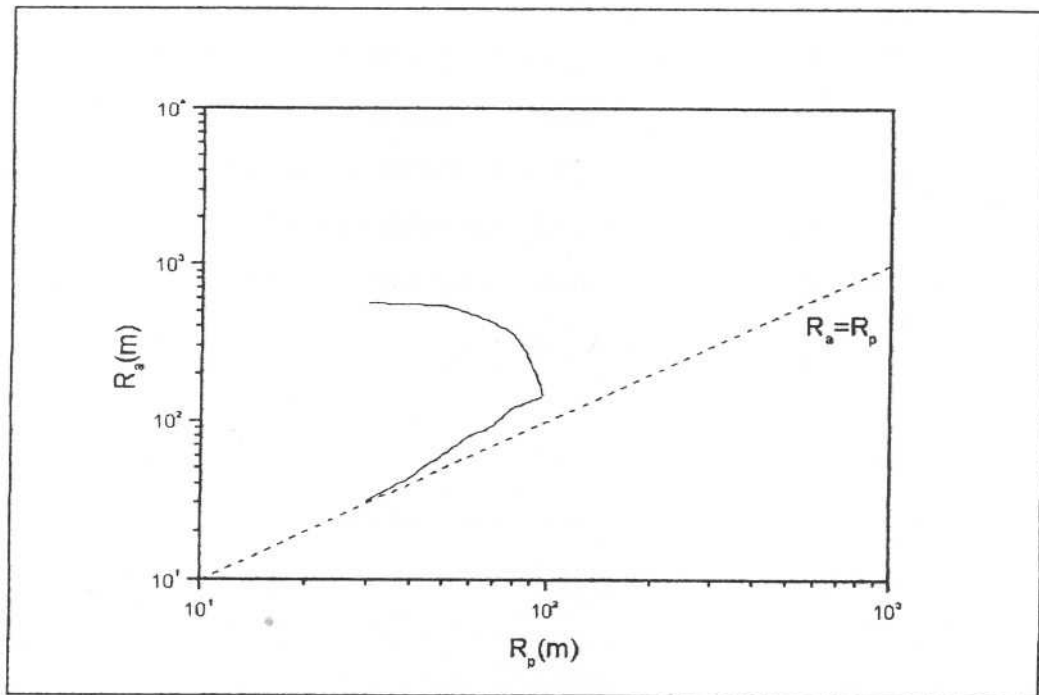


Figura 3.45. Soluções limite de ganho de massa no plano $R_a \times R_p$ para o arrasto variável.

3.5.1. Análise dos resultados para o modelo de arrasto variável

As figuras 3.41, 3.43 e 3.45 mostram a curva limite de ganho de massa para cada ressonância. Analisando essas figuras, conclui-se que:

- i) Há sempre um ganho de massa para colisões entre planetésimos de tamanhos semelhantes.
- ii) Colisões entre planetésimos alvos quaisquer com projéteis de raio acima de 450m para a ressonância 1:2, 200m para a ressonância 2:3 e 100m para a ressonância 3:4 sempre ocorrem com ganho de massa.
- iii) Colisões com projéteis pequenos e alvos muitas vezes maiores resultarão também em ganho de massa.

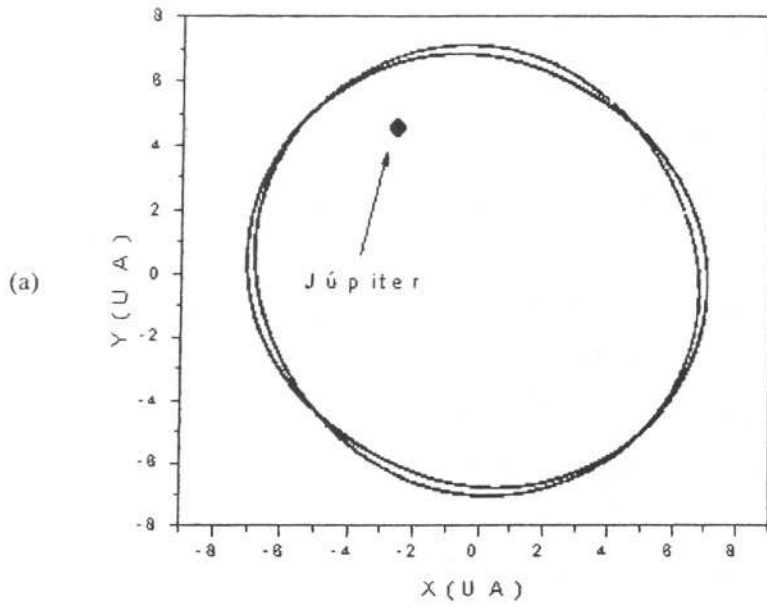
Pode ser observado que não há uma mudança muito grande em relação a análise feita na seção anterior, contudo, se comparada as velocidades de colisão dos modelos de arrasto fixo com o variável, percebemos que em alguns casos há um aumento das velocidades mas que em outros há uma diminuição. Isso sugere que o modelo de arrasto variável corrige exatamente o problema da descontinuidade entre os modelos.

Deve ser salientado que todos os resultados mostrados até aqui foram obtidos considerando-se uma órbita planetária circular. Para o caso de uma órbita planetária excêntrica deve ser esperado um aumento no valor das velocidades relativas de colisão, visto que essas são dependentes da excentricidade planetária. Contudo há de se investigar se mesmo com um aumento das velocidades relativas de colisão haverá mesmo que restritamente um crescimento de massa nas colisões entre os planetésimos.

3.6. Caso de órbita planetária excêntrica

Os resultados apresentados até aqui foram obtidos para o caso em que o planeta tem órbita circular. Nesta seção, serão feitas simulações considerando o planeta com órbita excêntrica. Sabemos que para órbitas planetárias excêntricas existe possibilidade de captura em ressonância corrotacional na qual planetésimos colidem, em geral, com baixas velocidades. Investigaremos, neste capítulo, como estas velocidades se darão quando as capturas passam para librações e também o caso de possíveis colisões entre planetésimos capturados em libração com outros capturados em corrotação.

No caso de órbita planetária circular as órbitas dos planetésimos são sempre as mesmas (num referencial girante com o planeta) mesmo quando se muda a longitude do planeta. Veja, por exemplo, duas órbitas para longitudes do planeta 0° e 120° que são mostradas nas figuras 3.46a e 3.46b. Todavia, para órbita planetária excêntrica, isso não ocorre. Neste caso usaremos o termo lugar geométrico para nos referirmos a possíveis posições dos planetésimos para uma longitude específica do planeta. A figura 3.47 mostra os lugares geométricos de um planetésimo com um específico coeficiente de arrasto para diferentes longitudes do planeta. Estes lugares geométricos podem também ser considerados como órbitas osculadoras no referencial girante e, neste sentido, serão também chamados abusivamente de “órbitas “ entre aspas. Desta maneira, a interseção de dois lugares geométricos para dois tamanhos de planetésimos diferentes vai dar os pontos onde os mesmos podem estar simultaneamente. Só aí poderão ocorrer as colisões e as velocidades de colisão podem ser dadas pela velocidade relativa de um em relação ao outro nestes pontos de interseção. Assim, para o caso de órbita planetária excêntrica serão feitas simulações de colisões para pares de planetésimos capturados em ressonâncias variando os valores da longitude do planeta.



(a)

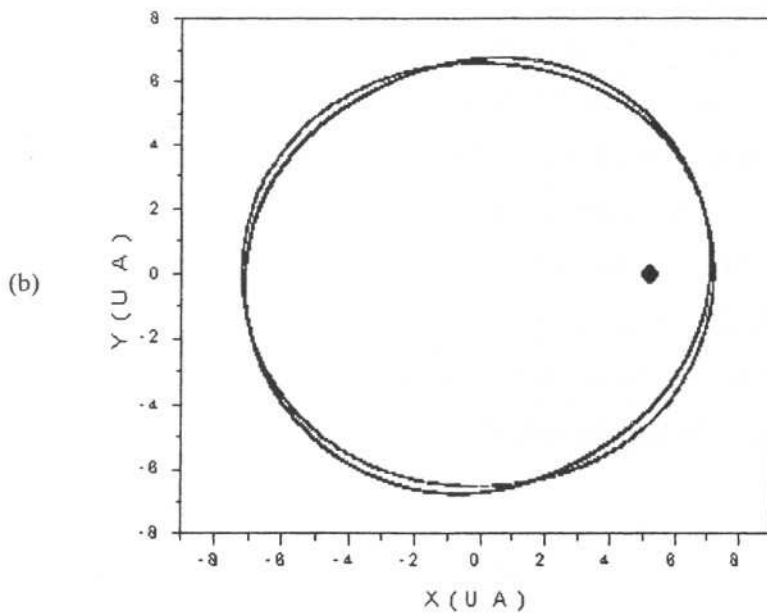


Figura 3.46. “Órbita” girando com o planeta de um planetésimo capturado na ressonância 2:3 com Júpiter tendo órbita circular e longitudes iguais a $\lambda = 120^\circ$ (a) e $\lambda = 0^\circ$ (b).

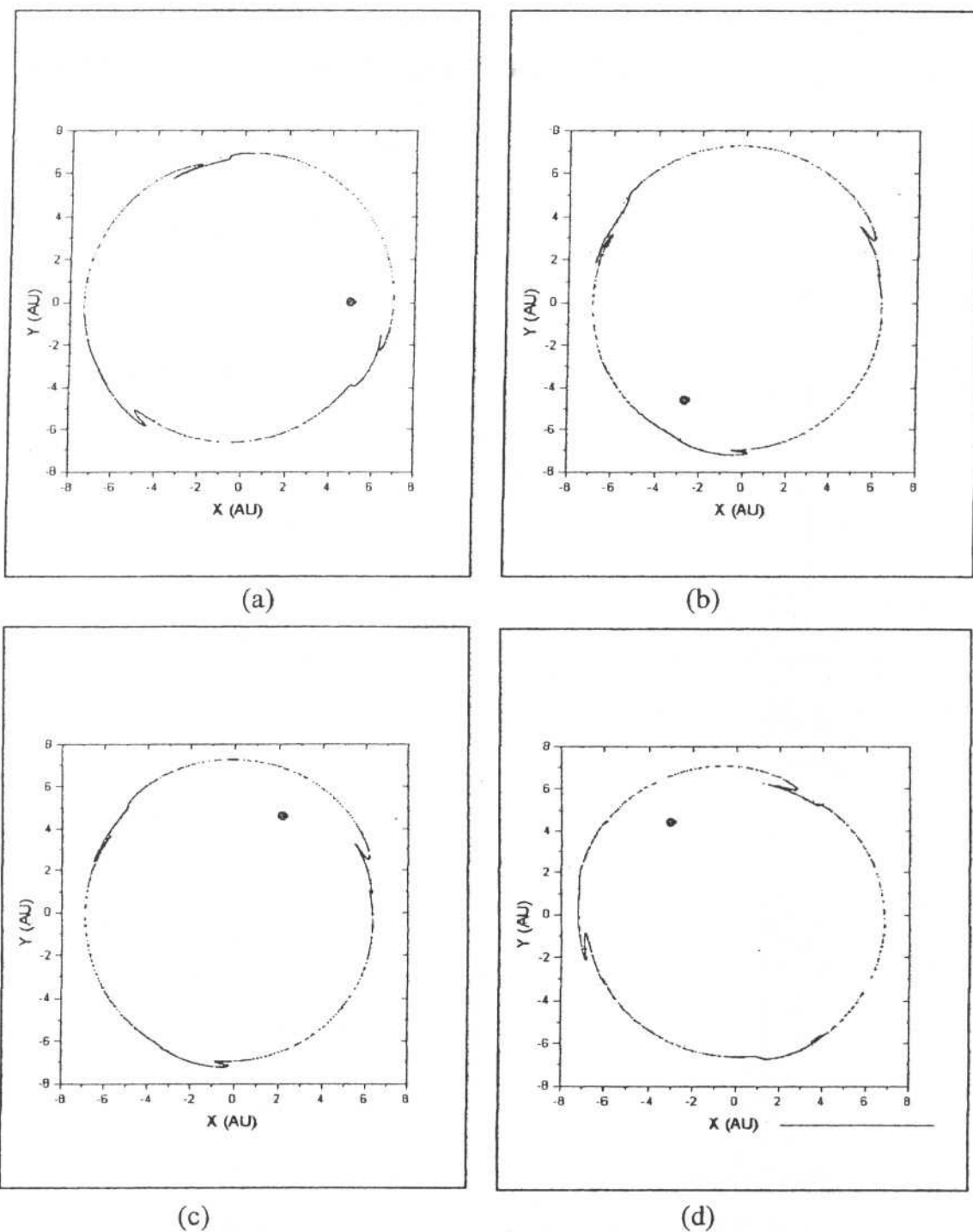


Figura 3.47. Lugares geométricos de um planetésimo capturado na ressonância 2:3 com Júpiter com órbita de excentricidade igual a 0,05 e longitudes iguais a $\lambda = 0^\circ$, $\lambda = 245^\circ$, $\lambda = 60^\circ$ e $\lambda = 120^\circ$.

Para o caso de órbita planetária não circular, ocorre a formação de lóbulos nas “órbitas” dos planetésimos como pode ser observado na figura 3.48. Esta figura é uma ampliação de uma região da figura 3.47(a). O algoritmo (descrito a seção 3.2.1.) foi usado para determinar as velocidades relativas de colisão nas interseções das órbitas.

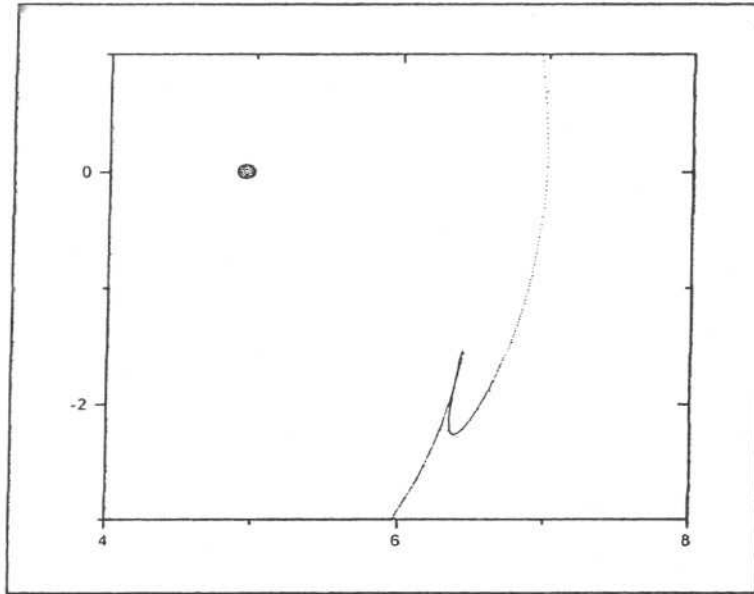


Figura 3.48. Ampliação de uma região de uma “órbita” de um planetésimos capturado a ressonância 2:3 com Júpiter de $e=0,05$ e $\lambda = 0$.

3.6.1. Estudo das velocidades relativas de colisão para as ressonâncias 2:3 e 3:4 e arrasto Stokes

A figura 3.49 mostra as “órbitas” de dois planetésimos capturados na ressonância 2:3 por Júpiter sobre ação do arrasto Stokes. Um planetésimo tem coeficiente de arrasto igual a $0,01 \text{ ano}^{-1}$ e o outro $0,001 \text{ ano}^{-1}$. Isso simula as “órbitas” de planetésimos “próximo da região de corotação”. Nessa simulação a saída dos dados é feita sempre que a longitude do planeta é igual a 360° . A seguir, são apresentadas as posições das interseções dos lugares geométricos e as velocidades relativas de colisão nestes pontos. Inicialmente (ponto 1 da Fig. 3.49) a posição de interseção das órbitas foi calculado em torno de $(x=-3,0)$ e as velocidades relativas de colisão foram calculadas em torno de 90 m/s . No pontos 2 ($x=-2,1$) ocorrem diversas interseções devido às interseções ocorrerem passando por um lóbulo. Nessa região algumas velocidades relativas de colisão são baixas como 5 m/s ou 30 m/s e outras muito altas como 650 m/s . No ponto 3 ($x=6,7$) as velocidades são próximas a 50 m/s . No ponto 4 ($x=2,0$) as velocidades estão em torno de 670 m/s sendo muito altas. Nos pontos 5 ($x=-3,3$) e 6 ($x=-4,6$) elas estão em torno de 90 m/s e no ponto 7 ($x=-6,35$) em torno de 490 m/s . Percebe-se então que existe uma maior quantidade de pontos de interseção onde se dão colisões à velocidades relativas altas. Essas mesmas órbitas foram anteriormente simuladas considerando uma órbita planetária circular. Comparando estes valores de velocidade aos obtidos para órbita planetária circular (entre 350 m/s e 500 m/s) conclui-se que as velocidades neste caso são mais altas, contudo, para o caso anterior não havia possibilidade de colisões à velocidades relativas baixas, o que ocorre quando se considera órbita planetária excêntrica.

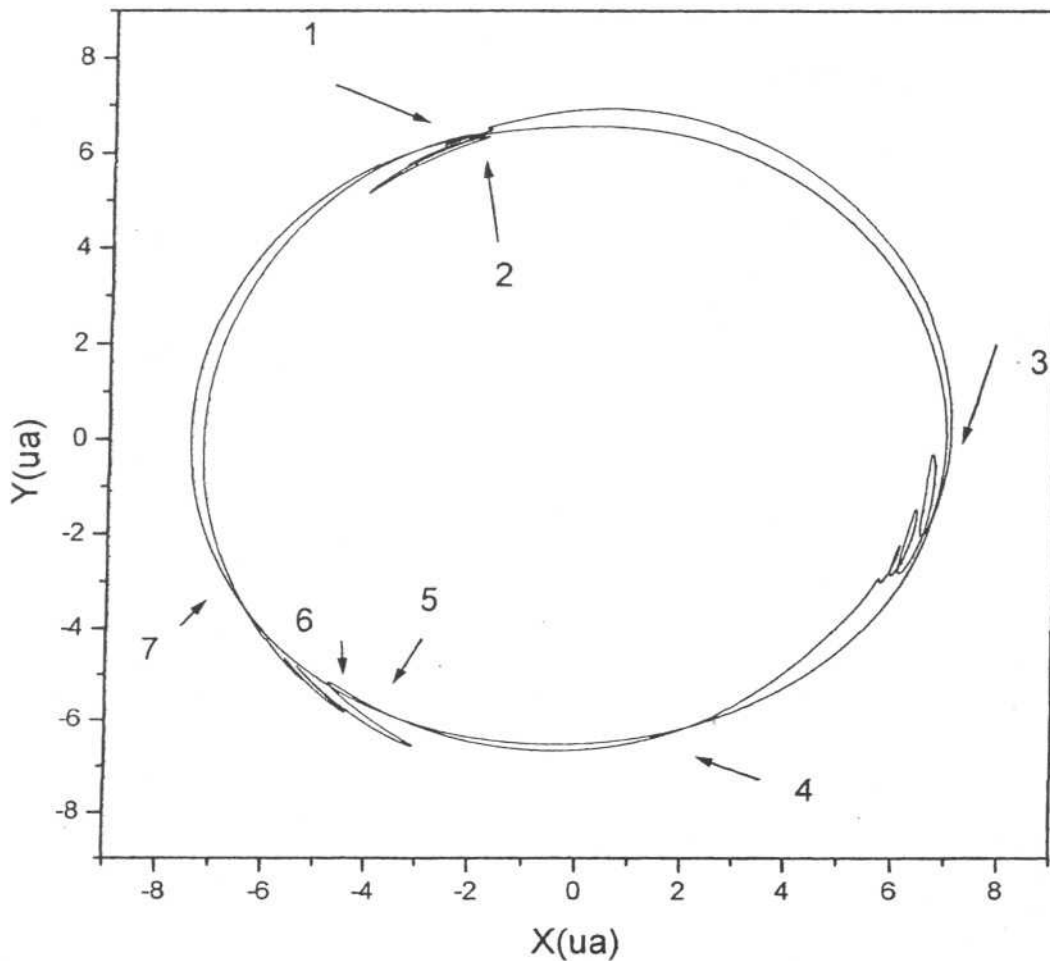


Figura 3.49. Órbitas de dois planetésimos com $K_1=0,01\text{ano}^{-1}$ e $K_2=0,001\text{ano}^{-1}$ capturados na ressonância 2:3 por Júpiter sobre ação do arrasto Stokes.

Numa outra simulação foram considerados dois planetésimos de tamanhos semelhantes capturados em libração mas ambos “perto da região de corrotação”. Para este caso as velocidades relativas variaram de um valor mínimo igual a 20m/s até um valor máximo igual a 650m/s. Para os mesmos tamanhos de planetésimos e órbita planetária circular as velocidades relativas encontradas foram 75m/s e 140m/s aproximadamente. Confirmando novamente o fato de que com a órbita planetária excêntrica a velocidade relativa entre os planetésimos tende a ser maior do que quando se simula as colisões com órbita planetária circular.

Outras simulações foram feitas considerando-se a variação na longitude do planeta. A figura 3.50 mostra as velocidades relativas de colisão para sete longitudes do planeta. O mesmo ocorre para a figura 3.51 só que para dois planetesimos com $C_1=0,0055\text{ano}^{-1}$ e $C_2=0,003\text{ano}^{-1}$. Observa-se que são poucas as colisão à baixas velocidades relativas e que a medida que o tamanho do planetesimo aumenta (menores valores para os coeficientes de arrasto) menores são as velocidades relativas de colisão.

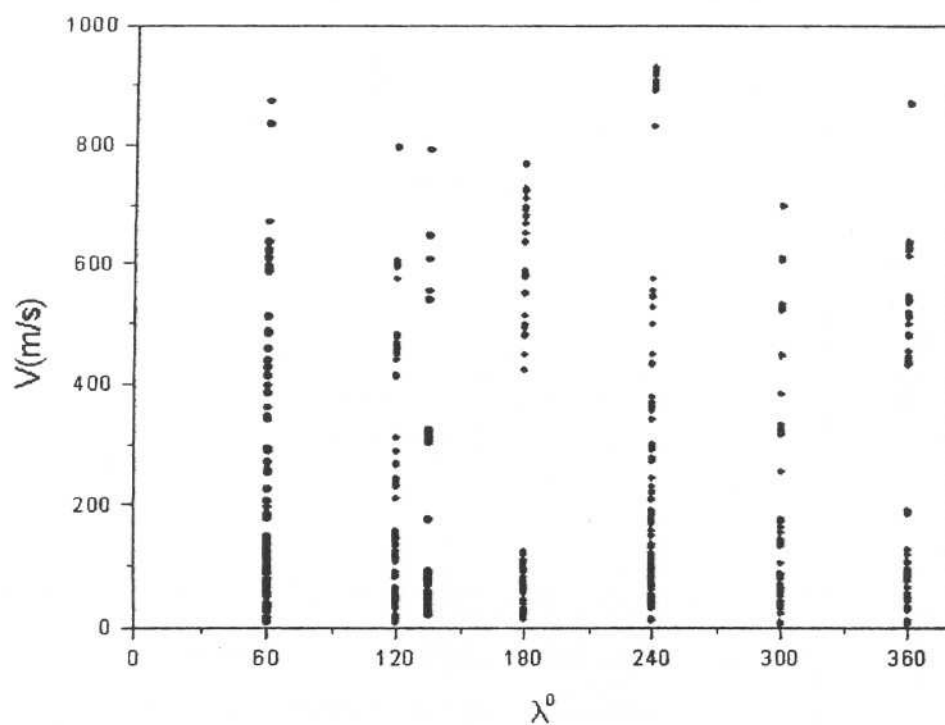


Figura 3.50. Posições de interseção das órbitas e as velocidades relativas de colisão para dois planetesimos com $C_1=0,01\text{ano}^{-1}$ e $C_2=0,001\text{ano}^{-1}$ para três diferentes valores de longitude do planeta.

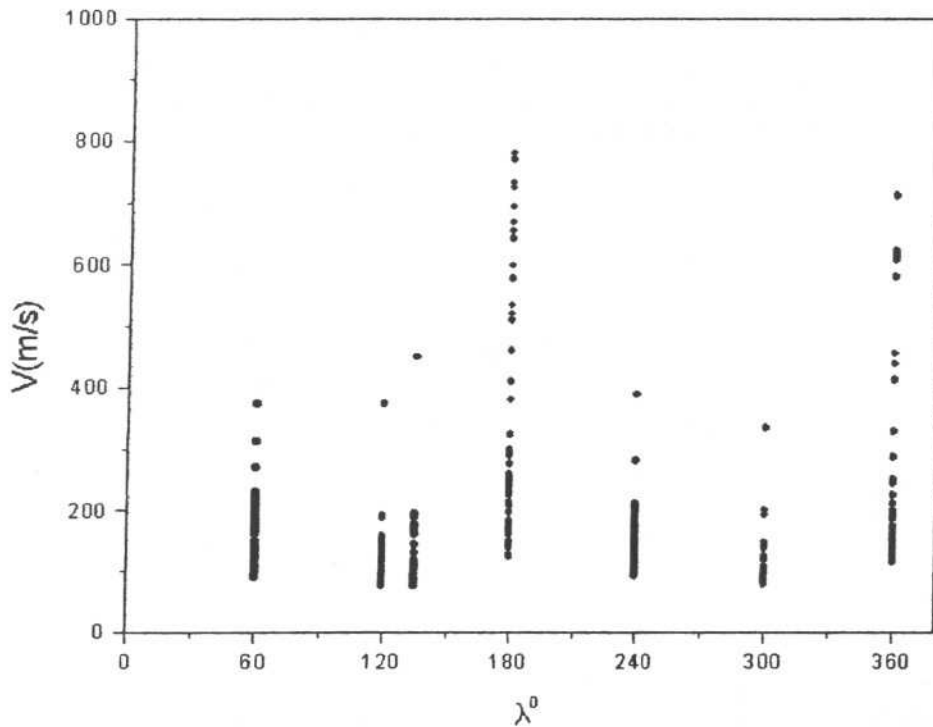


Figura 3.51. Posições de interseção das órbitas e as velocidades relativas de colisão para dois planetesimos com $C_1=0,0055\text{ano}^{-1}$ e $C_2=0,003\text{ano}^{-1}$ para três diferentes valores de longitude do planeta.

A figura 3.52 mostra duas órbitas para a ressonância 3:4 para valores de coeficientes de arrasto iguais a $0,015\text{ano}^{-1}$ e $0,001\text{ano}^{-1}$ e longitude do planeta igual a 360° . As velocidades relativas de colisão para este caso são aproximadamente iguais a 90m/s e 470m/s. Já para estas mesmas órbitas e órbita planetária circular as velocidades relativas foram iguais a 170m/s e 350m/s.

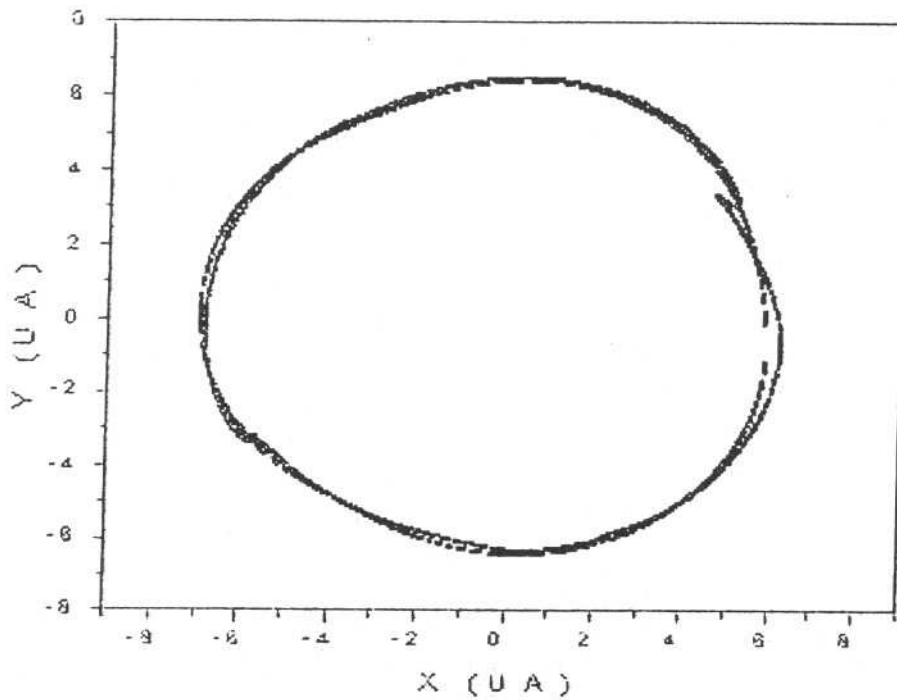


Figura 3.52. Duas órbitas para a ressonância 3:4 para $K_1=0,015\text{ano}^{-1}$ $K_2=0,001\text{ano}^{-1}$ e longitude do planeta igual a 360° .

A figura 1.1 (capítulo 1) mostra que para a ressonância 1:2 as órbitas de capturas preenchem uma região no plano XY e não convergem para uma figura unidimensional. Isso é observado apenas no caso excêntrico. Dessa maneira, as velocidades relativas de colisão não podem ser calculadas com auxílio do algoritmo desenvolvido, por isso nos ativemos ao cálculo das velocidades de colisão para as ressonâncias 2:3 e 3:4.

3.6.2. Colisões entre um planetésimo capturado em libração com outro capturado em corrotação

Nesta seção analisaremos o caso das colisões entre planetésimos capturados um em libração e outro em corrotação. A figura 2.2 (capítulo 2) mostra que as capturas em corrotação só ocorrem para um intervalo limitado de valores dos coeficientes de arrasto (ou tamanhos dos planetésimos). Capturas em libração ocorrem sempre para valores do coeficiente de arrasto menores que o valor mínimo do ponto de corrotação (ver a figura 2.2).

Para determinar as velocidades relativas de colisão entre um planetésimo em libração com um outro em corrotação foi feito o seguinte procedimento: Foram determinadas as órbitas de libração para três valores diferentes de coeficientes de arrasto; um próximo a corrotação ($K_{lib}=0,01ano^{-1}$), uma um pouco afastada ($K_{lib}=0,001ano^{-1}$) e uma última muito afastada ($K_{lib}=0,0001ano^{-1}$), para o arrasto Stokes e ressonância 2:3 por exemplo. Os valores dos pontos de corrotação estão no intervalo $0,014 < K_{cor}(ano^{-1}) < 0,034$. A seguir foram feitas as simulações de colisão entre as órbitas considerando o planeta nas longitudes $2\pi/6n$ ($n=0...5$), visto que para este caso uma mudança na longitude do planeta afeta a posição de interseção das órbitas.

A figura 3.54 mostra uma órbita de libração ($K_{lib}=0,001ano^{-1}$) e os pontos de corrotação para a ressonância 2:3 e arrasto Stokes. Observa-se que para este caso só há interseção em um dos três conjuntos separados de pontos corrotacionais.

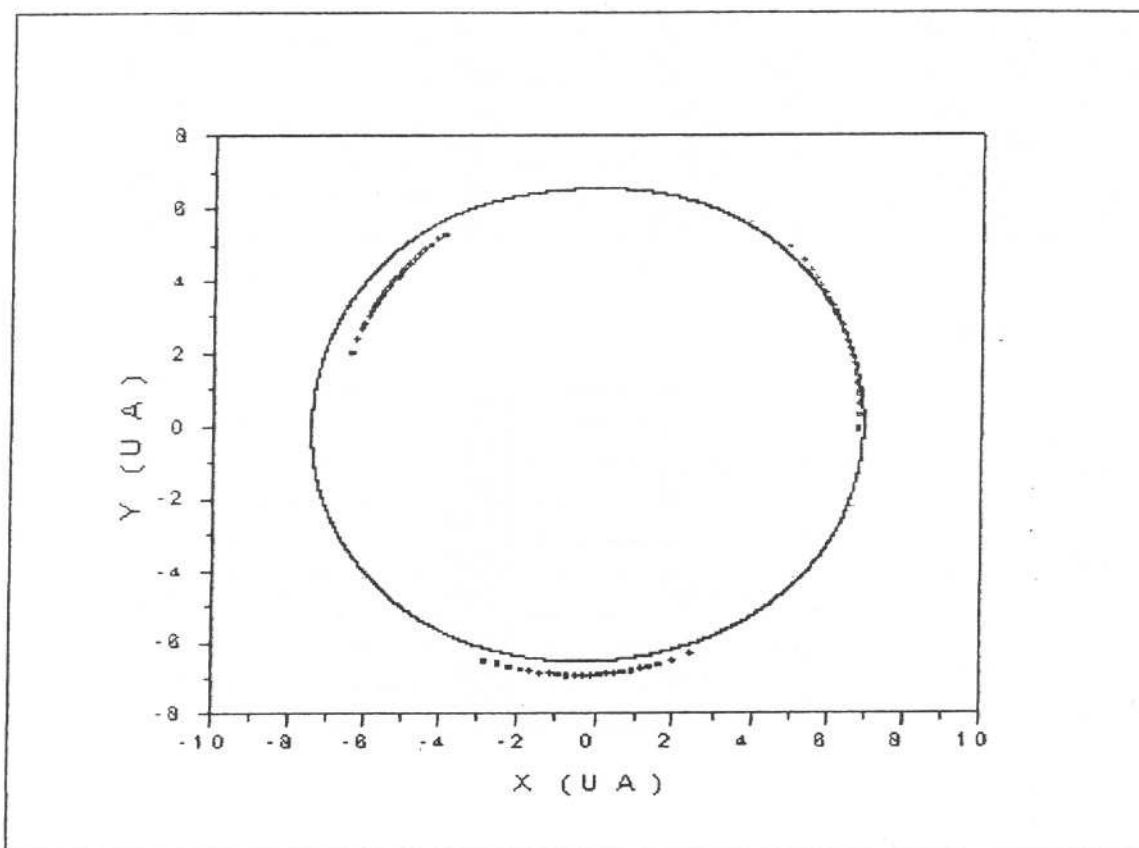


Figura 3.54. Coordenadas heliocêntricas de uma órbita de libração ($k=0,001\text{ano}^{-1}$) e dos pontos corrotacionais correspondentes a ressonância 2:3 e arrasto Stokes. Longitude do planeta igual a 0.

As tabelas abaixo mostram os resultados das colisões entre planetésimos capturados em corrotação com os três em libração. Cada tabela foi feita para cada um dos três ramos dos pontos em corrotação e as várias longitudes do planeta.

1^o RAMO

Vel. Rel. (m/s)	K_{cor}	Longitude (°)	K_{lib}
54.91716	0.02748	0	0,01
66.80621	0.02329	60	0,01
115.17334	0.02706	60	0,01
31.88676	0.03041	60	0,01
123.21342	0.03065	60	0,01
-	-	120	-
-	-	180	-
100.20164	0.01922	240	0,01
67.65739	0.02317	240	0,01

118.48099	0.03015	240	0,01
80.47299	0.01641	240	0,001
22.31238	0.03312	240	0,001
80.42190	0.01429	240	0,0001
24.20387	0.03311	240	0,0001
60.98036	0.02543	300	0,01

2º RAMO

-	-	0	-
195.26703	0.01543	60	0,01
63.54349	0.02772	60	0,01
-	-	120	-
-	-	180	-
204.03186	0.01688	240	0,01
68.03333	0.02975	240	0,01
35.56989	0.03350	240	0,01
-	-	300	-

3º RAMO

138.94543	0.01560	0	0,01
82.71461	0.02336	0	0,01
108.11470	0.02645	0	0,01
28.23217	0.03369	0	0,01
43.00372	0.02995	0	0,001
-	-	60	-
82.56517	0.02792	120	0,01
135.37065	0.02674	120	0,01
136.93004	0.02686	120	0,01
158.53029	0.02736	120	0,01
170.90245	0.02992	120	0,01
179.21970	0.03078	120	0,01
134.06909	0.01756	120	0,001
72.55106	0.02803	120	0,001
124.85134	0.01653	120	0,0001
74.88628	0.02768	120	0,0001
176.44713	0.02902	300	0,01
83.21353	0.02884	300	0,01
144.78621	0.01746	300	0,001
54.47460	0.03270	300	0,001
136.53743	0.01591	300	0,0001
57.13585	0.03275	300	0,0001

As tabelas mostram que as menores velocidades ocorrem para os menores valores de K_{lib} e que há praticamente colisões entre todos os planetésimos capturados em corrotação ($0,014 < K_{cor}(\text{ano}^{-1}) < 0,034$) com algum em libração. Este resultado pode ser, a princípio, pessimista no que diz respeito ao processo de ganho de massa nos pontos corrotacionais, pois os pontos de corrotação são tidos como sítios para formar planetésimos cada vez maiores. O resultado das simulações mostram que há sempre colisões entre planetésimos capturados em libração com os em corrotação a velocidades que não são baixas. Desta maneira, estas colisões poderiam barrar o processo de ganho de massa quando os planetésimos capturados migrassem para um mesmo ponto de corrotação.

CONCLUSÕES E DISCUSSÃO GERAL

Nesta seção faremos uma análise geral de todo o estudo que foi realizado até então procurando mostrar a importância deste estudo como uma contribuição ao estudo da formação planetária.

Inicialmente foi feita uma apresentação dos modelos atuais de formação planetária. O objetivo desta introdução era mostrar como estes modelos operam para formar os planetas, as vantagens e os problemas que cada um apresenta e a importância dos nossos estudos dentro deste contexto.

No capítulo 1 foi feita uma discussão geral sobre o fenômeno da captura em ressonância de planetésimos por um planeta, em que foi mostrado o mecanismo em si, discutiram-se os resultados de alguns trabalhos que foram feitos a respeito do fenômeno e indicou-se o que ainda poderia ser feito a respeito.

No capítulo 2 foram apresentados dois métodos para determinar os pontos de equilíbrio em corrotação para o problema restrito elíptico de três corpos. O primeiro é um método de primeira ordem que, no entanto, não tem nenhuma limitação para o caso de órbitas excêntricas visto que este método não utiliza o truncamento da função de perturbação. Este método pôde determinar os pontos de equilíbrio para qualquer excentricidade planetária sendo assim mais amplo em termos de aplicações que o método analítico de primeira ordem desenvolvido por Beaugé e Ferraz-Mello (1993), mostrando soluções para excentricidade planetária alta e encontrando soluções para as ressonâncias internas. Contudo o método falha na determinação dos pontos de equilíbrio para as ressonâncias extensas (Mothé-Diniz e Gomes 2000) as quais poderiam ser obtidas usando-se um modelo mais refinado (teorias de ordem maiores). A seguir foi apresentado o método numérico, o qual é basicamente um algoritmo numérico iterativo, para determinar os pontos de equilíbrio em corrotação. Este método fornece as soluções de equilíbrio em corrotação de maneira mais precisa que as encontradas com o método semi-numérico para todos os casos inclusive corrotação extensa. Além do mais o tempo gasto em computação para determinar as soluções é menor ou da ordem do tempo gasto com o método semi-numérico.

Exceto para as capturas em ressonâncias corrotacionais extensas, existe um valor mínimo e um máximo do tamanho do planetésimo para o qual captura em corrotação

acontece. Acima deste limite as capturas ocorrem sempre em libração. Dependendo dos parâmetros físicos da nebulosa e do planetésimo e considerando um planeta com massa similar a de Júpiter, os tamanhos dos planetésimos capturados em corrotação pode variar de poucos metros até próximo de 1km. Para este intervalo o arrasto do gás sobre os planetésimos é muito eficiente em induzir uma rápida queda orbital dos planetésimos, assim a captura em ressonância por um proto planeta pode deter esta rápida queda orbital e favorecer o processo de ganho de massa, a medida que os planetésimo colidem. Além do mais, devido ao fato das capturas em corrotação colocar vários planetésimos de mesmo tamanho em pontos de equilíbrio comuns, com velocidades relativas muito baixas (Mothé-Diniz e Gomes 2000), estes pontos podem agir como fábricas de planetésimos. Este fato em si serviu de motivação para o desenvolvimento de métodos mais completos para a determinação de pontos de equilíbrio corrotacionais.

Foi encontrado que para algumas ressonâncias e massas planetárias ocorrem capturas em corrotação extensa. A principal característica deste tipo de captura é que não há limite superior do tamanho do planetésimo acima do qual o regime de captura troca para libração. Neste sentido, o processo de acumulação de massa poderia ser, em princípio, indefinido, chegando-se a formação de embriões planetários em determinados locais. Acontece que as capturas extensas foram encontradas somente para algumas ressonâncias de ordem altas (4:7 e 7:9), as quais são associadas a uma baixa probabilidade de captura. Além do mais estas ressonâncias de ordem altas sobrepoem ressonâncias de ordem menores o que muito provavelmente fará com que planetésimos capturados em diferentes ressonâncias colidam com velocidades relativas altas.

Foram, também, encontradas soluções de equilíbrio para as ressonâncias interiores, as quais mostraram ser extensas (as de ordem mais baixas). Só que estas capturas ocorrem somente para planetas com massas similares a de Júpiter e excentricidades altas (0,1-0,4). Para excentricidade similar a de Júpiter, só ocorrem capturas interiores com massas planetárias muito menores ($\sim 1/100M_J$) e próximas ao planeta (ressonâncias 9:8, 11:10). Em todos os casos de ressonâncias interiores foram observados, a partir de simulações numéricas, que a probabilidade de captura era muito baixa, fato este que limita a aplicabilidade das capturas interiores ao favorecimento do processo de acumulação de massa. Desta maneira, parece que a importância da captura

em corotação é parar a queda orbital dos planetésimos, devido ao forte arrasto que sofrem, e promover a acumulação dos mesmos ($1-10^3\text{m}$) em pontos de equilíbrio exteriores a órbita do planeta. A partir desta etapa, seriam formados corpos maiores ($>10\text{km}$), por colisões de acumulações. Estes embriões estariam sujeitos a interações gravitacionais mútuas o que resultaria em colisões tanto com fragmentação como com acumulação mas, com um balanço positivo para o ganho de massa. Várias simulações tem mostrado o crescimento de embriões para formar núcleos planetários (Wetherill e Stewart 1993, Beaugé et al. 1994, Weidenschilling et al. 1997). Contudo, deve ser enfatizado que, se um planeta for formado na maneira mais convencional por colisões de acumulação o mecanismo da captura em ressonância não pode ser evocado para iniciar o processo de crescimento de massa dos planetésimos. Neste sentido, o mecanismo da captura em ressonância é particularmente útil se for considerado o modelo de formação planetária no cenário proposto por Boss (1997), ou seja, proto planetas gigantes formados de maneira rápida e o processo de acumulação por colisões sendo responsável pela formação de outros planetas, satélites, asteróides e cometas.

Uma outra questão que naturalmente surge é: O que acontece com os planetésimos que vão sendo carregados para os pontos de corotação e após acumularem massa e crescerem passam para o regime de libração? Para este caso não há nenhum ponto de acumulação. Desde que planetésimos capturados em ressonância tem excentricidades maiores que os não capturados, é de se esperar que colisões entre eles resulte em fragmentação total ou parcial dos mesmos pois, as colisões se dariam a velocidades relativas altas. Este fato foi primeiro notado por Weidenschilling e Davis (1985) que sugerem que os fragmentos das colisões entre os planetésimos passariam pelas ressonâncias que encontrassem e sob influência do arrasto do gás continuariam sua queda orbital até serem acumulados pelo planeta em formação. Neste raciocínio a captura em libração favorece o crescimento de massa dos proto planetas formados e não dos planetésimos em si. Esta questão foi estudada com maior detalhe no capítulo 3. Neste capítulo foi desenvolvido um algoritmo para calcular as velocidades relativas de colisão entre dois planetésimos capturados em libração. Com auxílio deste algoritmo foram determinadas inicialmente as velocidades relativas de colisão para planetésimos com tamanhos variando a partir de 10m até 10km capturados nas ressonâncias 1:2, 2:3 e 3:4 e sob ação de um arrasto do gás modelado (arrasto proporcional a V , $V^{1,4}$ e V^2). Para

todas as ressonâncias e modelos de arrasto foram encontradas; colisões a velocidades relativas baixas, para planetésimos com tamanhos diferentes mas que, vão diminuindo a medida que o tamanho do planetésimos alvo vai aumentando. A seguir foi utilizado um modelo analítico para estudar a fragmentação em colisões. Com este modelo seria possível investigar quais as situações que poderiam favorecer a um crescimento de massa nas colisões.

Uma análise dos resultados obtidos mostrou que as colisões entre pares de planetésimos capturados numa mesma ressonância (exterior a um planeta) que podem resultar em ganho de massa de um dos planetésimos são restritas a planetésimos com tamanhos similares e colisões entre qualquer alvo a partir de um determinado tamanho ($>100\text{m}$), com qualquer projétil. Este último caso seria muito interessante mas devemos ter em mente que o modelo de formação dos planetésimos deve ocorrer a partir da acumulação gradual de objetos com tamanhos menores para formar os maiores.

Foi visto que os resultados obtidos com o modelo de arrasto intermediário considerado ($\sim V^{1.4}$) não eram muito precisos devido a alguns planetésimos estarem sujeitos a um arrasto intermediário mas que não seria bem modelado por um arrasto tipo $V^{1.4}$. Isto foi solucionado considerando um modelo de arrasto variável de tal modo que a expressão da força dissipativa variasse continuamente de Stokes a V^2 pela variação do coeficiente de arrasto. Para este modelo foi considerado que a densidade e temperatura no plano médio da nebulosa variavam segundo leis de potência (Weidenschilling 1977). Não foi observado nenhuma mudança muito grande em relação aos resultados obtidos com os modelos fixos, contudo, percebe-se quando se compara as velocidades de colisão com os modelos de arrasto fixo e o variável que em alguns casos há um aumento destas velocidades mas que em outros ocorre uma diminuição. Isto sugere que o modelo de arrasto variável corrige exatamente a determinação da velocidade em relação ao modelo fixo, sendo assim mais precisos. Estes resultados foram obtidos considerando o planeta com órbita circular. No entanto, para obtermos resultados mais confiáveis era necessário considerarmos o caso de órbitas planetárias excêntricas. Vimos que, para este caso, as velocidades relativas de colisão são menores e maiores que as velocidades obtidas quando se considera a mínima e a máxima velocidade para o caso de órbita circular. Para o caso de órbita planetária excêntrica, existem muito mais velocidades

relativas de colisão altas que baixas. Fato este que sugere que colisões para planetésimos capturados em libração tenham mais chance de ocorrer com fragmentação.

Por fim foram consideradas as colisões entre um planetésimo capturado em corrotação com um planetésimo capturado em libração. Foram encontradas velocidades relativas de colisão altas, o que resultaria em fragmentação total ou parcial dos planetésimos. Este resultado seria muito positivo pois como foi visto os pontos de equilíbrio em corrotação são semeadores de planetésimo e as colisões de planetésimos capturados em libração com planetésimos nestes pontos poderia destruir esta propriedade.

Embora, no geral, a conclusão deste trabalho sobre a possibilidade de acreção de planetésimos capturados em ressonância seja negativa, seria necessário investigar, através de simulações numéricas, se esta seria realmente a regra. Uma possibilidade de haver no geral formação de corpos maiores nas ressonâncias incluiria os seguintes passos:

1. Planetésimos ainda pequenos seriam capturados em corrotação por um planeta gigante pré-formado.
2. Se este processo for bastante eficiente, corpos já suficientemente grandes poderiam ser gerados a partir dos pontos corrotacionais.
3. Estes corpos grandes, segundo os resultados do capítulo 3, se aglutinariam entre si e também ganhariam massa pela colisão de projeteis menores capturados ainda em corrotação ou mesmo em libração no limite da corrotação.

Uma investigação deste tipo deverá ser feita como trabalho futuro.

BIBLIOGRAFIA

- Adachi, I., Hayashi, C. and Nakazawa, K. 1976. The gas drag effect on elliptic motion of a solid body in the primordial solar nebula. *Prog. Theor. Phys.* 56. 1756-1771.
- Beaugé, C., Aarseth, S. J. and Ferraz-Mello, S., 1994. Resonance capture and the formation of the outer planets. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 270. 21-34.
- Beaugé, C. and Ferraz-Mello, S. 1993. Resonance trapping in the primordial nebula. The case of a Stokes drag dissipation. *Icarus* 103. 301-318.
- Boss, A. P. 1996. Evolution of the solar nebula III. Protoplanetary disks undergoing mass accretion. *Astrophys. J.* 469. 906-920.
- Boss, A. P. 1997. Giant planet formation by gravitational instability. *Science* 276, 1836-1839.
- Boss, A. P. 1998. Formation of extrasolar giant planets. Core accretion or disk instability? *Earth, Moon, planets* 81. 19-26.
- Boss, A. P. 1999. Formation of extrasolar giant planets. Core accretion or disk instability? *Earth, Moon and Planets* 81. 19-26
- Brunini, A. e Fernandez, J. A. 1999. Numerical simulations of the accretion of Uranus and Neptune. *Planet. Space. Sci.* 47, 591-605.
- Butler, R. P. and Marcy, G. W. 1996. A planet orbiting 47 Ursae Majoris. *Astrophys. J.* 464, 153-156.
- Butler, R. P., Marcy, G. W., Williams, E., Hauser, H. ad Shirts, P. 1997. Three new "51 Pegasi-type" planets. *Astrophys. J.* 474, 1115-1118.
- Brower, D. and Clemence, G. M. 1961. *Methods of celestial mechanics.* Academic Press, New York.
- Butler, R. P., Marcy, G. W., Williams, E., Houser, H. e Shirts, P. 1997. Three new "51 Pegasi-Type" planets. *Astrophys. J.* 474, 115-118.
- Cameron, A. G. W. 1978. Physics of the primitive solar accretion disk. *Moon and Planets* 18, 5-40.
- Chambrier, G., Saumon, D. Hubbard, W. B. and Lunine, J. I. 1992. The molecular-metallic transition of hydrogen and the structure of Jupiter and Saturn. *Astrophys. J.* 391, 817-826.

- Everhart, E. 1985. An efficient integrator that uses Gauss-Radau spacings. In dynamics of comets. Their origin and evolution. A. Carusi and G. B. Valesch, eds. pp 195-202.
- Gomes, R. S. 1995a. Resonance trapping and evolution of particles subject to Poynting-Robertson drag. Adiabatic and non-adiabatic approaches. *Celestial Mech.* 61, 97-113.
- Gomes, R. S. 1995b. The effect of nonconservative forces on resonance lock. Stability and instability. *Icarus*, 115, 47-59.
- Greenberg, R. 1973. Evolution of satellite resonance by tidal dissipation, *Astron. J.* 78, 338-346
- Guillot, T., Chabrier, G., Morel, P. and Gautier, D. 1997. Nonadiabatic models of Jupiter and Saturn. *Icarus* 112, 354-367.
- Hayashi, C., Nakazawa, K. and Nakagawa, Y. 1985. Formations of the solar system. In *Protostars & Planets II*. Black, D. C., Matthews, M. S., eds. Tucon. Univ. Ariz. Press. pp. 1100-1154.
- Henrard, J. 1982. Capture into resonance. An extension of the use of adiabatic invariants. *Celestial Mech.* 27, 3-22.
- Henrard, J. e Lemaître, A. 1993. A second fundamental model for resonance. *Celestial Mech.* 30, 197-218.
- Ip, W. H. 1989. Dynamical processes of macro-accretion of Uranus and Neptune. A first look. *Icarus* 80, 167-178.
- Kary, D. M. and Lissauer, J. J. 1995. Nebular gas drag and planetary accretion. *Icarus*, 117, 1-24.
- Kortenkamp, S. and Wetherill, G. W. 2000. Terrestrial planet and asteroid formation in the presece of giant planets. I. Relative velocities of planetesimals subject to Jupiter and Saturn perturbations. *Icarus* 143, 60-73.
- Kuiper, G. P. 1951. In *Astrophysics*, J. A. Hynek ed., pp. 357-424. New York. McGraw Hill.
- Levison, H. F. e Stewart, G. R. 2001. Remarks on modeling the formation of Uranus and Neptune. *Icarus* 153, 224-228.
- Lissauer, J. J. 1993. Planet formation. *Annu. Ver. Astron. Astrophys.* 31, 129-174.
- Malhotra 1988. Some aspects of the dynamics of orbit-orbit resoances in the Uranian satellite system, PhD dissertation, Cornell University.

- Malhotra, R. 1993. Orbital resonances in the solar nebula. Strengths and weakness, *Icarus*, 106, 264-273.
- Marcy, G. W. e Butler, R. P. 1996. A planetary companion to 70 Virgins. *Astrophys. J.* 464, 147-151.
- Mizuno, H. 1980. The formation of the giant planets. *Prog. Theor. Phys.* 64, 544-557.
- Mothé-Diniz, T. e Gomes, R. S. 2000. Corotation resonances and planetary formation. *Planet. Space Sci.* 48, 305-318.
- Paterson, C. W. 1987. Resonance capture and the evolution of the planets. *Icarus* 70, 319-333.
- Peale, S. J. 1986. Orbital resonances, unusual configurations ad exotic rotation states among planetary satellites, em *Satellites*, J. A. Burns and M. S. Matthews eds. Univ. of Arizona Press, Tucson, 159-223.
- Peale, S. J. 1993. The effect of the nebula on trojan precursors. *Icarus*, 106, 308-322.
- Pollack, J. B., Hubickyj, O. and Greenzweig, Y. 1996. Formation of the giant planets by concurrent accretion of solids and gas. *Icarus* 124, 62-85.
- Prandtl, L. 1952. *Essentials of fluid dynamics*. pp. 118-191.
- Safronov, V. S. 1969. *Evolution of the protoplanetary cloud and formation of the Earth and planets*, Nauka, Moscou. (English trans. IPST, Jerusalem, 1972).
- Shampine, L. F. and Gordon, M. K. 1975. *Computer solution of ordinary differential equations. The initial value problem*, eds. W. H. Freeman and Co., San Francisco.
- Stevenson, D. J. 1982. Formation of the giant planets. *Planet. Space Sci.* 30, 755-764.
- Strom, S. E., Edwards, S. e Skrutskie, M. F. 1993. Evolutionary time scales for circumstellar disks associated with intermediate and solar type stars. Em *Protostars and Planets III*. E. H. Levy e J. I. Lunine eds., pp. 837-866. Univ. of Arizona Press, Tucson.
- Thommes, E. W., Duncan, M. J. e Levison, H. F. 1999. The formation of Uranus and Neptune in the Jupiter-Saturn region of the outer Solar System. *Nature* 402, 635-638.
- Thommes, E. W., Duncan, M. J. e Levison, H. F. 2002. The formation of Uranus and Neptune among Jupiter and Saturn. Submetido para o *Astronomical Journal*.
- Weidenschilling, S. J. and Davis, R. D. 1984. Orbital resonances in the solar nebula. *Icarus*, 62, 16-29.
- Weidenschilling, S. J. 1977. Aerodynamics of a solid bodies in the solar nebula. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 180, 57-70.

Wetherill, G. W. and Stewart, R. G. 1993. Formation of planetary embryos. Effects of fragmentation, low relative velocity and independent variation of eccentricity and inclination. *Icarus* 106, 190-209.

Wurm, G. e Blum, J. 1998. Experiments on preplanetary dust aggregation. *Icarus* 132, 125-136.